

Fiche 9

La fonction $(x, y) \mapsto H(x, y)$ appelée hamiltonien satisfait :

$$\begin{cases} x' = \partial_y H(x, y) \\ y' = -\partial_x H(x, y) \end{cases}$$

un système est dit hamiltonien s'il existe une fonction $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \underline{\mathcal{C}^2}$ telle que :

$$f(y) = \begin{pmatrix} \partial_y H \\ -\partial_x H \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

exercice 1:

$$1) \begin{cases} x' = -y \\ y' = x(1+y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases}$$

on pose $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Si $\operatorname{div} f = 0$, alors le système d'équations $y' = f(y)$ est hamiltonien.

$$\text{Avec } \operatorname{div} f = \partial_x f_1(x, y) + \partial_y f_2(x, y).$$

$$\bullet \partial_x(-y) + \partial_y(\underbrace{x(1+y)}_{x+xy})$$

$$= 0 + x$$

$$= x \neq 0$$

donc le système n'est pas hamiltonien.

$$2) \begin{cases} x' = -x - y^2 \\ y' = y + x^2 \end{cases}$$

$$\bullet \partial_x(-x - y^2) + \partial_y(y + x^2)$$

$$= -1 + 1 = 0$$

donc le système est hamiltonien.

Il existe une fonction H de classe C^2 telle que.

$$\begin{cases} x' = \partial_y H(x, y) \\ y' = -\partial_x H(x, y) \end{cases}$$

① $\partial_y H(x, y) = -x - y^2$

primitive p/r y

$$H(x, y) = -xy - \frac{y^3}{3} + g(x)$$



② $\partial_x H(x, y) = -y + g'(x)$

or $y + x' = -\partial_x H(x, y)$

d'où $y + x' = y - g'(x)$

$$\Rightarrow x' = -g'(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{x^3}{3} + C, C \in \mathbb{R}$$

Donc :

$$H(x, y) = -xy - \frac{y^3}{3} - \frac{x^3}{3} + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Khölle

exercice 1 :

1) voir cours.

2) Soit $x, y \in X \subset \mathbb{R}$.

$$|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

car f est Lipschitzienne sur X

$$\text{or } 0 \leq |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

on fait tendre x vers y ,

Donc d'après le théorème d'encadrement:

$$\lim_{x \rightarrow y} |f(x) - f(y)|,$$

et donc $\lim_{z \rightarrow y} f(z) = f(y)$.

Donc f est continue sur X

exercice 2 :

1) . f est continue par rapport à ses deux variables.

• f est C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et donc f est localement lipschitzienne par rapport à y .

Donc elle vérifie les deux conditions du th. de C-L.

2) 1) après le théorème de Cauchy-Lipschitz local il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $y(0) = y_0$.

3) $y'(t) = y^2(t) \sin(t)$

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = \sin(t).$$

$$-\frac{1}{y(t)} = -\cos(t) + C$$

$$\frac{1}{y(t)} = \cos(t) - C$$

$$y(t) = \frac{1}{\cos(t) - C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$4) \quad y(0) = y_0$$

$$y(0) = \frac{1}{1-c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-c} = y_0$$

$$\Leftrightarrow 1-c = \frac{1}{y_0}$$

$$\Leftrightarrow c = 1 - \frac{1}{y_0} = \frac{y_0 - 1}{y_0}.$$

L'unique solution du problème de Cauchy.

$$g(t) = \frac{1}{\cos(t) - \frac{y_0 - 1}{y_0}}$$

$$= \frac{y_0}{y_0 \cos(t) + 1 - y_0}$$

avec t tel que $\cos(t) \neq \frac{y_0 - 1}{y_0}$

exercice 3 :

$$1) \quad g'(t) = \frac{t + g(t)}{t - g(t)}$$

$$g'(t) = \frac{t \left(1 + \frac{g(t)}{t}\right)}{t \left(1 - \frac{g(t)}{t}\right)}$$

$$y'(t) = \frac{1 + \frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}} = F\left(\frac{y}{t}\right)$$

avec $F(x) = \frac{1+x}{1-x}$

2) on pose $\overset{u(t)}{u} = \overset{y(t)}{\frac{y}{t}} \Leftrightarrow y = ut$

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}} = \frac{1+u}{1-u}$$

$$y' = u't + u \times 1$$

d'où $u't + u = \frac{1+u}{1-u}$

$$u't = \frac{1+u}{1-u} - u$$

$$u' t = \frac{1+u-u+u^2}{1-u}$$

$$u' t = \frac{1+u^2}{1-u}$$

$$u' \times \frac{1-u}{1+u^2} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{u'}{1+u^2} - \frac{u' u}{1+u^2} = \frac{1}{t}$$

$(u^2)' = 2u u'$

$$\arctan(u) - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln(1+t) + C$$

or $u = \frac{y}{t}$, donc les solutions sont de la forme :

$$\arctan\left(\frac{y}{t}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) = \ln(1+t) + C$$

exercice 4:

$$1) \cdot D_x(2y) + D_y(-3x^2)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

donc le système est
hamiltonien.

$$2) H(x, y) = y^2 + x^3 + C, \text{ } C \in \mathbb{R}$$

Khülle

exercice 3:

Bernoulli:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + P(t)y = Q(t)y^n(t) \end{array} \right.$$

on pose $z = y^{1-n} = \frac{1}{y^{n-1}}$

Ici $n = 3$, on pose

$$z(t) = \frac{1}{y^2(t)} \quad \Leftrightarrow \quad z'(t) = -\frac{y'(t)}{y^3(t)}$$

exercice 2:

$$y' \times \frac{y(x) + 1}{y^2(x) + 1} = e^x$$

$$\frac{y' y}{y^2 + 1} + \frac{y'}{y^2 + 1} = e^x$$

$$\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) + \arctan(y) = e^x + C$$