

Algèbre Linéaire

Feuille 1 : Diagonalisation

Feuille 2 : Trigonalisation

Feuille 2 bis : Diagonalisation

Feuille 3 : Jordan / minimale

Feuille 4 : Jordan.

Feuille 5 : Forme quadratique.

Facultät T D 1

exercice 3 :

$$T_r(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).$$

$$P_A(\lambda) = \det(\overbrace{A - \lambda I_2}^{\lambda I_2 - A})$$

$$= \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

exercice 4:

a) $A = P D P^{-1}$ ou $D = P^{-1} A P$

avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ e_{-1} $\downarrow$ e_8

b) $A = P D P^{-1}$

↳

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 8^n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\det \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 8^n & 2((-1)^n - 8^n) \\ 8^n - (-1)^n & 2^{3n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}$$

c)

on cherche B' tel que $(B')^3 = D$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \text{ on pose}$$

$$B' = D^{\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d'aut on a bien $(B')^3 = D$.

Donc comme $A = P D P^{-1}$,
on pose:

$$B = P B' P^{-1}$$

et on aura bien :

$$B^3 = P (B')^3 P^{-1} = P D P^{-1} = A.$$

d) on cherche $C' \in \mathcal{O}_2(\mathbb{C})$ telle
que $(C')^2 = D$.

on pose $C' = \sqrt[2]{D} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Handwritten note in red: $\sqrt{-1} = i$

et on a bien: $C^2 = D$.

Comme $A = P D P^{-1}$,

on pose $C = P C' P^{-1}$, et
on a :

$$C^2 = P (C')^2 P^{-1} = P D P^{-1} = A.$$

c) On suppose qu'il existe
une matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle
que $C^2 = A$.

Or C et $C^2 = A$ commutent
et donc en particulier

$C' = P C P^{-1}$ devrait
commuter avec $D = P A P^{-1}$.

D'après la question b) de II,
il faudrait que $r = s$ avec
 $r = -\frac{1}{2}$ et $s = \frac{1}{2}$. Aburde
Donc il n'existe pas $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

exercice 6:

a) on pose
$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{n-1} + 2u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a bien
$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}.$$

$$u_{n+1} = A u_n \Rightarrow u_n = A^n u_0$$

Et,
$$u_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

on pose
$$u_n = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix},$$
 on a:

$$u_{n+1} = A u_n.$$

Donc
$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

• on cherche A^{n-1} .

→ diagonalise A .

$$A = P D P^{-1}$$

avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

→ on cherche les puissances de A :

$$A^{n-1} = P D^{n-1} P^{-1}.$$

$$\text{or } D^{n-1} = \begin{pmatrix} (-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d'_{cu} \quad A^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1-(-2)^n) & \frac{1}{3}((-2)^n+2) \\ \frac{1}{6}((-2)^n+2) & \frac{1}{6}(1-(-2)^n) \end{pmatrix}$$

denote as a:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2(u_1(-2)^n - u_1 - u_0(-2)^n) - 2u_0 \\ u_1(-2)^n + 2u_1 - u_0(-2)^n + 3u_0 \end{pmatrix}$$

¹ Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = -\frac{1}{3} \left(u_1(-2)^n - u_1 - u_0(-2)^n - \frac{2u_0}{2} \right)$$