

exercice 7:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

2) $g(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2$

$$g'(x) = 2 \times -\frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}$$

3) $g'(x) \geq 0$

$$-\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3} \geq 0$$

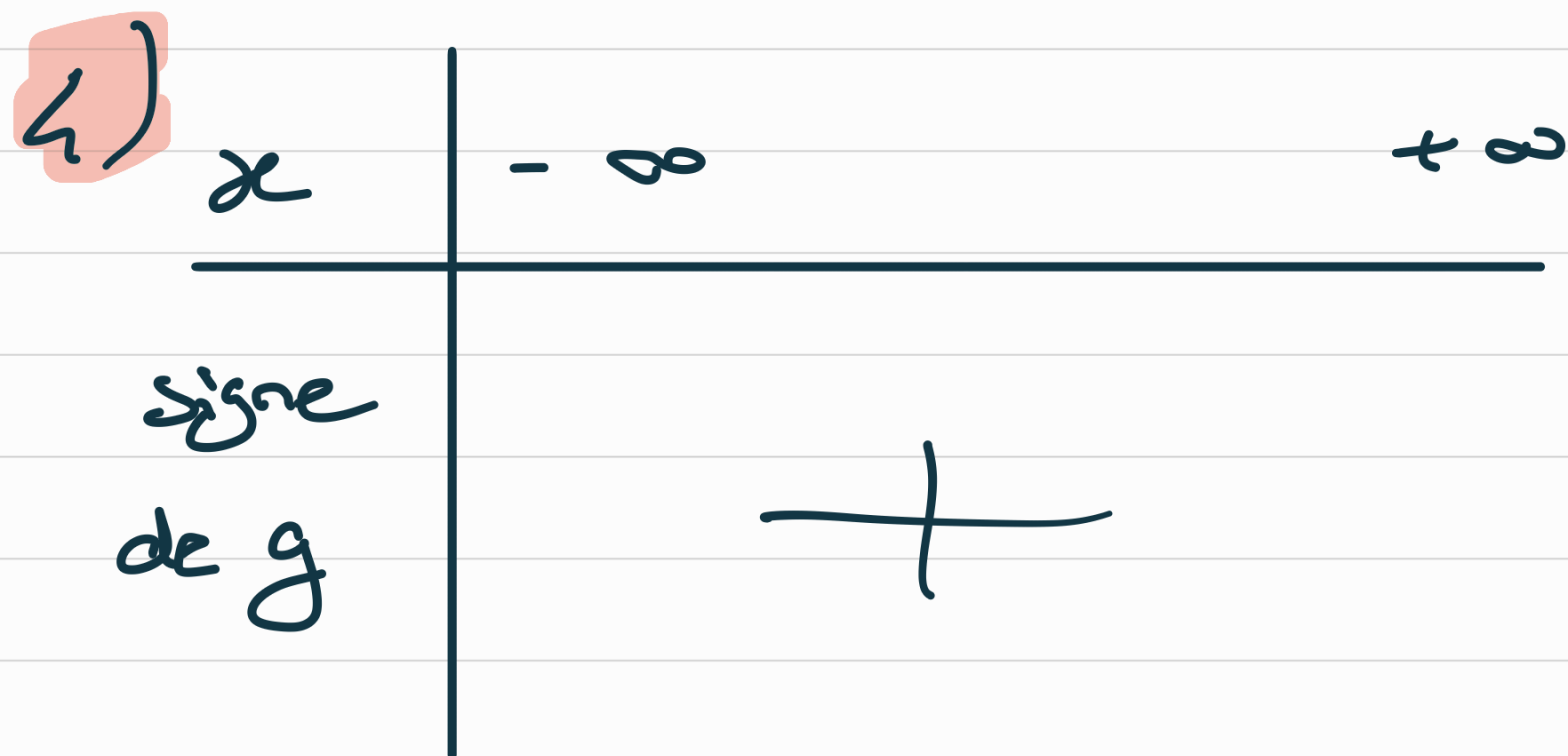
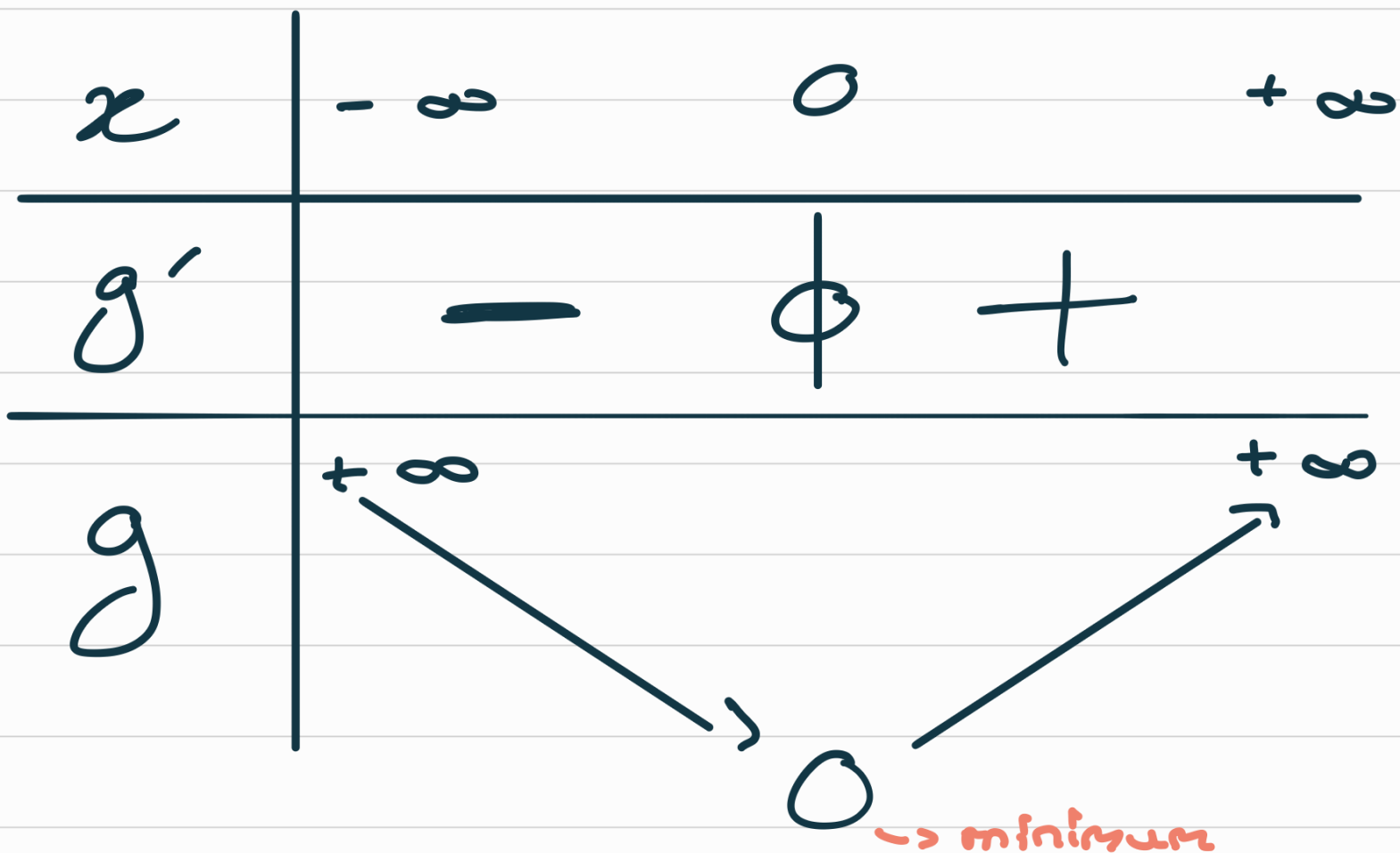
$$-\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}x} \geq -\frac{2}{3}$$

$$e^{-\frac{1}{3}x} \leq \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} = 1$$

$$e^{-\frac{1}{3}x} \leq e^0$$

$$-\frac{1}{3}x \leq 0$$

$$x \geq \frac{0}{-\frac{1}{3}} = 0$$



car g admet comme minimum 0 sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

1) a) $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$T_a f: y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$$f(0) = 2$$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} = -\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}x}$$

Annotations: $u' e^u$ with $u(x) = -\frac{1}{3}x$

$$f'(0) = -\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3} \times 0} = -\frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow f - \Delta_0 \geq 0 \Leftrightarrow f \geq \Delta_0$$

2) on pose $h(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{3}x + 2\right)$

$$h(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2 = g(x)$$

or d'après la partie A,
on sait que g est positive
sur $\mathbb{R}$.

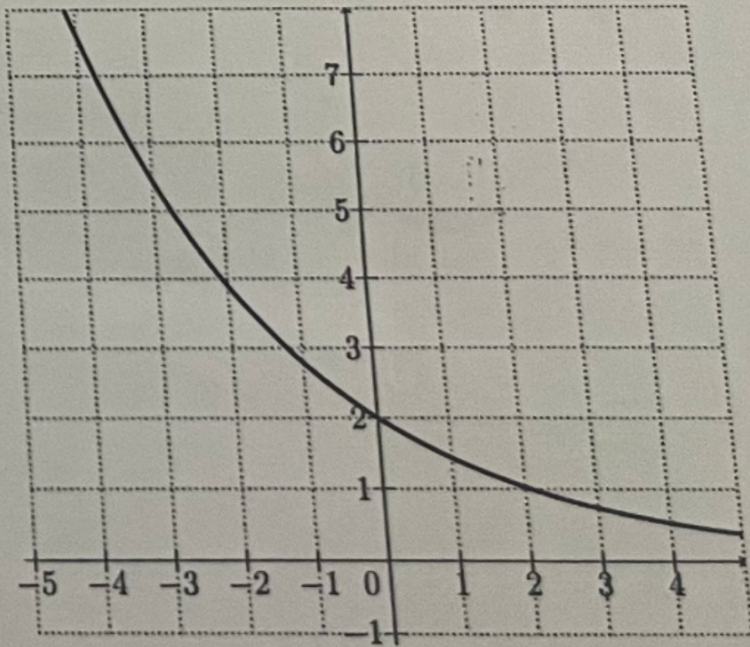
Donc h est positive sur $\mathbb{R}$,
et la courbe $\mathcal{C}_f$ est au
dessus de la tangente (Δ_0) .

Partie C

1. Soit A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a , a réel quelconque.

Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.

2. Tracer la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse -2 dans le repère ci-dessous :



$$\text{1) } y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
$$y = -\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}a}(x - a) + 2e^{-\frac{1}{3}a}$$

axe des abscisses : $y = 0$

$$0 = -\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}a}(x - a) + 2e^{-\frac{1}{3}a}$$

$$0 = -\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}a} (x-a) + 2 e^{-\frac{1}{3}a}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \underbrace{e^{-\frac{1}{3}a}}_{\neq 0} \left[-\frac{2}{3} (x-a) + 2 \right]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} (x-a) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} x + \frac{2}{3} a + 2 = 0$$

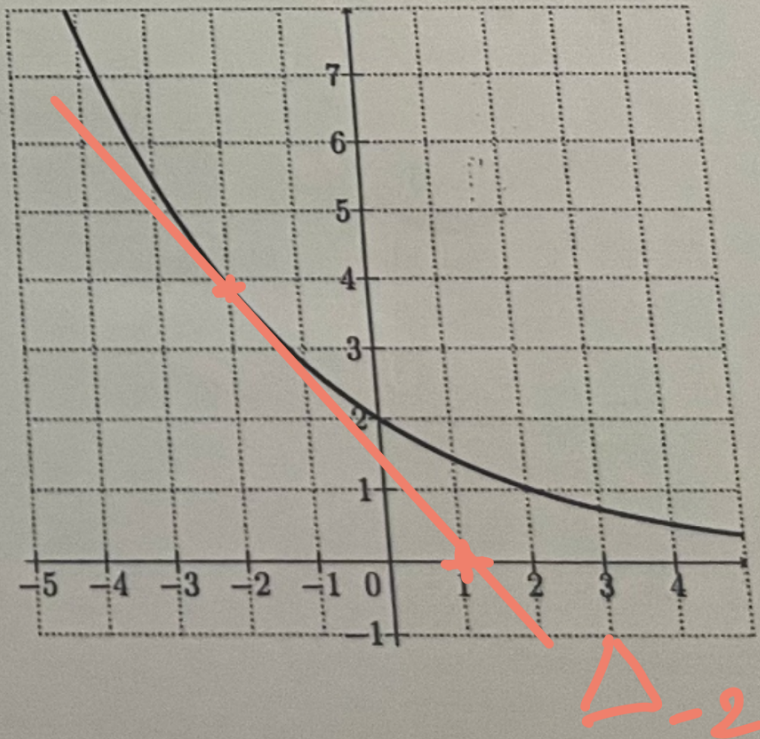
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} x = -\frac{2}{3} a - 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\frac{2}{3} a - 2}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-\cancel{\frac{2}{3}} a}{-\cancel{\frac{2}{3}}} - \frac{\textcircled{2}}{\cancel{\frac{2}{3}}} = a + 3$$

donc (Δ_a) coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a+3$.

2. Tracer la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse -2 dans le repère ci-dessous :



(Δ_{-2}) coupe l'axe des abscisses en $-2+3=1$

exercice 8:

$$f(x) = \underbrace{x^n}_u \underbrace{e^{-x}}_v$$

$(uv)' = u'v + uv'$

1) a) $f'(x) = nx^{n-1} \times e^{-x} + x^n \times (-e^{-x})$

$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$= e^{-x} (nx^{n-1} - x^n)$$

$$= e^{-x} (nx^{n-1} - x^n)$$

$$= e^{-x} x^{n-1} \left(n - \frac{x^n}{x^{n-1}} \right)$$

$$= e^{-x} x^{n-1} (n - x^{n-(n-1)})$$

$$= e^{-x} x^{n-1} (n - x^{1-1+1})$$

$$= e^{-x} x^{n-1} (n - x)$$