Feuille de TD3

E est stable par f si $f(E) \subset E$.

exercice 2 :

1) $\{0\}$ → dimension 0

$\mathrm{Vect}\{e_1\}$ $\mathrm{Vect}\{e_2\}$ $\mathrm{Vect}\{e_3\}$.

E_1, E_2, E_3 → dimension 1

E_1^T E_2^T E_3^T

$\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$

→ dimension 2

$\mathbb{R}^3$ → dimension 3.

2) 1 v.p triple

$$E_1 = \ker(A - I_3)$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$= \text{Vect}\{(1,0,0)\}.$$

donc : $\{0\} \to$ dimension 0

$E_1 \to$ dimension 1

$$N_i = \ker(A - \lambda_1 I_n)^{\alpha_1}$$

$$P_A(\lambda) = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots$$

- $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$E_1^T = \ker(A^T - I_3)$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e_3

donc $E_1^T = \text{Vect}\{(0,0,1)\}$.

Donc $\text{Vect}\{e_1, e_2\} \to$ dimension 2

- $\mathbb{R}^3 \to$ dimension 3.

méthode :

$\{0\} \to$ dimension 0.

$\text{Vect}\{e_\lambda\} \to$ dimension 1

vecteur propre A^T.

$\text{Vect}\{e_\lambda, e_\lambda^T\} \to$ dimension 2

$\mathbb{R}^3 \to$ dimension 3.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

. $\{0\} \to$ dimension 0

. $\lambda = 0$ de mult. 3.

$E_0 = \ker(A - 0I_3) = \ker(A)$

$\iff x + y + z = 0$

$\iff x = -y - z$

donc $E_0 = \text{Vect}\{(-1;\overset{y}{1};0),\ (-1;0;\overset{z}{1})\}$

$$x+y+z=0$$

$$x = \underbrace{-y-z}_{2} \qquad y = \underbrace{-x-z}_{2} \qquad z = \underbrace{-x-y}_{2}$$

$$\ker(A) = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \{(-y-z,\ y,\ z) : (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$$

$$= \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1) : (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$$

$$= \text{Vect}\{(-1,1,0),\ (-1,0,1)\}.$$

on a $\dim E_0 = 2$.

$\rightarrow \text{Vect}\{(-1,1,0)\}, \text{Vect}\{(-1,0,1)\}$

$\hookrightarrow$ dimension 1

- $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0$

$E_0^T = \ker(A^T - 0I_3)$

$= \ker(A^T)$

$\Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

donc $\ker(A^T) = \{(z, y, z)\}$
et $V_B = \{ a(x_1 + x_3) + bx_2 = 0 \}$

donc $\text{Vect}\{(1,0,-1)\} \rightarrow \dim 2.$

exercice 3 :

$$N_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{N_5}(\lambda) = \det(N_5 - \lambda I_4)$$
$$= -\lambda^4$$

- P est annulateur de A si $P(A) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$
- $P_A(\lambda)$ annule A
- $m_A(\lambda) \mid P_A(\lambda)$

et m_A est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule A.

. $N_S \neq 0$

. $N_S^2 \neq 0$

. $N_S^3 \neq 0$

. $N_S^4 = 0$

donc $m_A(\lambda) = \lambda^4$.

<u>méthode</u> : P_A caractéristique.

$(A-\lambda)$ $(A-\lambda)^2$ ...

$\hookrightarrow (A-\lambda)^k = 0 \Rightarrow m_A = (\ )^k$

exercice 7 :

a) $P_c(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$

$= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4)$

$= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$

- 1 v.p simple
- 2 v.p double

$E_1 = \ker(A - I_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$E_2 = \ker(A - 2I_3) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on cherche $v(x, y, z)$ tel que :

$$(C - 2I_3)v = (1, 1, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = 1 \\ x = y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$$

on pose $v(1,1,1)$

ou $v(2,2,1)$

$v(-1,-1,1)$

$v(0,0,1)$

donc $C = PEP^{-1}$.

b) $E = D + \mathcal{U}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>vérifie</u> : $D\mathcal{U} = \mathcal{U}D$.

et $\mathcal{U}^2 = 0$, donc l'indice de nilpotence est 2.

$$E^n = (D + u)^n$$

Binôme de Newton

- $\underline{AB = BA}$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k A^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k D^{n-k} \quad , \quad \underline{u^2 = 0}$$

$$= \binom{n}{0} u^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} u^1 D^{n-1}$$

$+ 0 + 0$

$+ 0 \cdots$

$$= D^n + n\mathcal{U}D^{n-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n\mathcal{U}D^{n-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

c) $C = PEP^{-1}$

$$C^n = PE^nP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & -2^{n-1}n & 2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n + 2^n - 1 & 1 - 2^{n-1}n & 2^{n-1}n \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

d) $C = S + N$

$A = PJP^{-1}$

avec $J = D + N$

$\Rightarrow$ alors $A = D' + N'$

avec $\begin{cases} D' = PDP^{-1} \\ N' = PNP^{-1} \end{cases}$

$S = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$N = PUP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

exercice 4 :

- $J^2 \neq 0$, $J^3 = 0$
  ↳ indice de nilpo. = taille max d'un bloc.
- $J \in \mathcal{M}_7(k) \Rightarrow$ Somme des tailles des blocs vaut 7.
- $rg(J) = 4$

Par le théorème du rang, $\dim(\ker(J)) = 7 - 4 = 3$.

↳ le nombre de bloc est $\boxed{3}$.

$7 = 3 + 3 + 1 \qquad 7 = 3 + 2 + 2$

Il y a deux formes canoniques possibles.

- $J = J_3 + J_3 + J_1$

$J = J_3 + J_2 + J_2$.