

Derivation

$$1. f(x) = x^2 + 1$$

$$2. g(x) = x + \sqrt{x}$$

$$3. h(x) = x^3 + x^2$$

$$4. i(x) = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$$

$$5. j(x) = \frac{4x + 1}{x}$$

$$6. k(x) = x^2 + x + 4 + \frac{1}{x}$$

$$6) k'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$1) f'(x) = 2x$$

$$2) g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3) h'(x) = 3x^2 + 2x$$

$$4) i'(x) = 3x^2 + 1 - \frac{2}{x^3}$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$5) j'(x) = \frac{4x - (4x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$2. g(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

$$3. h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$2) g'(x) = \frac{2x(1-x) - (x^2-1)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2x - 2x^2 + x^2 - 1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 2x - 1}{(1-x)^2} = \frac{-(x-1)^2}{(1-x)^2} = -1$$

$$2) h'(x) = \frac{2x \times x^2 - (x^2 - 1) \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4}$$

$$= \frac{\cancel{2x}}{x^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{2}{x^3}.$$

$$3. h(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$

$(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)$

$$4. i(x) = x^2(2x + 4)$$

$$h'(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{x} + 1)}{\cancel{2}\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$i'(x) = 2x(2x+4) + x^2 \times 2$$

$$= 4x^2 + 8x + 2x^2$$

$$= 6x^2 + 8x.$$

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 3x + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 2.

1. Vérifier que, pour tout réel x , $f'(x) = 10x + 3$.
2. Calculer le nombre dérivé de f en 2. En déduire le coefficient directeur de la droite T .
3. Calculer $f(2)$. En déduire les coordonnées du point A.
4. Parmi les équations ci-dessous, laquelle est une équation de T ?

a. $y = 23x + 27$

b. $y = 23x - 19$

c. $y = 23x$

1) $f'(x) = 10x + 3$

2) $f'(2) = 23$, donc le coefficient directeur de la droite T est 23.

3) $f(2) = 27$, donc les coordonnées de A sont $(2; 27)$.

4) $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$$y = 23(x-2) + 27$$

$$y = 23x - 46 + 27$$

$$y = 23x - 19$$

$$T_a f: y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

EXERCICE 6

Un tonneau de vin de 100 litres se vide en 10 minutes.

A l'instant t , exprimé en minutes, la quantité de vin déjà vidée est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par l'expression :

$$f(t) = 20t - t^2$$

Le débit à l'instant t , exprimé en litres par minutes, est $f'(t)$.

1. Calculer $f'(t)$.
2. En déduire le débit de vin à l'instant $t = 5$.

1) $f'(t) = 20 - 2t$

2) $f'(5) = 20 - 2 \times 5 = 10$

donc le débit de vin à l'instant $t = 5$ est de 10 L/min.

EXERCICE 11

La courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f passe par les points A (0 ; -1), B (1 ; -4) et C (2 ; -1).

La fonction f est dérivable en 0, en 1 et en 2.

On sait que $f'(0) = -6$, $f'(1) = 0$ et $f'(2) = 6$.

Déterminer l'équation réduite des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points A, B et C d'abscisses respectives 0, 1 et 2.

- $$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = -6x - 1$$

- $$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = 0x(x-1) - 4$$

$$y = -4$$

- $$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$y = 6(x-2) - 1$$

$$y = 6x - 13$$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. a. Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$ pour un réel h non nul.

Rappel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

- b. En déduire que le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est égal à $4+h$.

2. Montrer que la fonction f est dérivable en 1 et donner la valeur du nombre dérivé $f'(1)$.

1) a) $f(1) = 1^2 + 2 \times 1 - 3 = 0$

$$f(1+h) = (1+h)^2 + 2(1+h) - 3$$

$$= \cancel{1} + 2h + h^2 + \cancel{2} + 2h - \cancel{3}$$

$$= h^2 + 4h$$

b) $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h}$

$$= \frac{\cancel{h^2}}{\cancel{h}} + \frac{4\cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$= h + 4.$$

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h + 4$$

$$= 4$$

donc f est dérivable en
1 et $f'(1) = 4$.