$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)^2$$

$$\Rightarrow m_A(\lambda) = 2-\lambda \quad \underline{\text{ou}} \quad m_A(\lambda) = (2-\lambda)^2$$

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $m_A(\lambda) = (2-\lambda)^2$.

Si le polynôme caractéristique scindé à racines simple :

$$P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots$$

$$\Leftrightarrow \quad m_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots$$

$$P_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad m_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

<u>ou</u> $m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$

- $(A-2I)(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $(A-2I)^2(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$.

Formes quadratiques

$b : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite :

- **bilinéaire** : linéaire à droite et linéaire gauche.

$\forall x_1, x_2 \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, y \in E$
$b(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda b(x_1, y) + \mu b(x_2, y)$

$\forall y_1, y_2 \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in E$:
$b(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda b(x, y_1) + \mu b(x, y_2)$

- **Symétrique** : $\forall x, y \in E$

$$b(x, y) = b(y, x)$$

méthode : symétrique 1
linéaire droite ou gauche 2

- **antisymétrique** : $\forall x, y \in E$

$$b(x,y) = -b(y,x)$$

- **non-dégénérée** : si le seul vecteur $x \in E$ tel que $f(x,y) = 0$ $\forall y \in E$ est le vecteur nul.

↳ non dégénérée si rang(b) est maximale, ie rang$(b) = \dim E$.
$\Leftrightarrow \det M(b) \neq 0$.

- **dégénérée** = pas (non dégénérée)

- **vecteur isotrope** : un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $b(x,x) = 0$

exercice 1 :

$$D_1(f,g) = \int_0^1 f'(x)\, g'(x)\, dx$$

1. Soit $f, g \in V$

$$D_1(f,g) = \int_0^1 f'(x)\, g'(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 g'(x)\, f'(x)\, dx$$

$$= D_1(g,f).$$

donc D_1 est symétrique.

$\mathrm{rad}(b) = \{ x \in E : b(x,y) = 0, \forall y \in E \}.$

2 Soit $g \in V$

on cherche $f \in V$ telle que $B_1(x,y) = 0$

$$B_1(f,g) = \int_0^1 f'(x) g'(x)\, dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow f'(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow f = cst$$

donc $\mathrm{rad}(B_1) = \{ f \in V, f \ cst \}$

$= \mathrm{Vect}\{1\}$

3 $\mathcal{P} = \{1, x, x^2\}$

$$\left.\begin{aligned} B_1(1,1) &= 0 \\ B_1(1,x) &= 0 \\ B_1(1,x^2) &= 0 \end{aligned}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} B_1(x,1) &= 0 \\ B_1(x,x) &= \int_0^1 1 \times 1 \, dx = 1 \\ B_1(x,x^2) &= \int_0^1 1 \times 2x \, dx = 1 \end{aligned}\right]$$

$$\mathcal{B} = \{ e_1, e_2, e_3 \}$$

$$M_{\mathcal{B}}\, b = \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & b(e_1,e_2) & b(e_1,e_3) \\ b(e_2,e_1) & b(e_2,e_2) & b(e_2,e_3) \\ b(e_3,e_1) & b(e_3,e_2) & b(e_3,e_3) \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}\, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$B_1(X^2, 1) = 0$$

$$B_1(X^2, X) = 1$$

$$B_1(X^2, X^2) = \int_0^1 2x \times 2x \, dx = \frac{4}{3}$$

4) $\boxed{\mathrm{rang}(b) = \mathrm{rang}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b))}$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{matrix}\right) & & \\ \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} & & \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} C_3 - C_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rang}(\mathcal{B}_1) = 2$

5) $\mathrm{rang}(\mathcal{B}_1) = 2 \neq \overbrace{\dim(\mathbb{R}_2[X])}^{3}$

donc $\mathcal{B}_1$ est dégénérée.

6) on cherche $f \in V$ tel que

$\mathcal{B}_1(f, f) = 0$

$$\int_0^1 (f'(x))^2 \, dx = 0$$

donc $(f'(x))^2 = 0$ car f continue

d'où $f'(x) = 0$ donc $f = cst$

Donc les vecteurs isotropes par rapport à B_i sont les polynômes constants.

exercice 3 :

$q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire symétrique associée telle que $q(x) = b(x,x)$

$\hookrightarrow$ b est nommée la forme polaire de q.

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$

1) $Q_1(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$

① $M_{\mathcal{B}} Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

② $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\text{rang}(Q_1) = 1$, et

Q_1 n'est pas <u>non - dégénérée</u>.

③ $$Q_1(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$= \underbrace{\,}_{a_1 = 1}\underbrace{(x + y)}_{L_1}^2$$

④ $$\boxed{\begin{aligned} & q(x, y) = a_1 L_1^2 + a_2 L_2^2 + \dots + a_n L_n^2 \\ & \hookrightarrow \ sg(q) = (\text{nb } a_i > 0 \, ; \, \text{nb } a_i < 0) \end{aligned}}$$

$$sg(Q) = (1 \, ; \, 0)$$

$q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow$ définie positive si $sg(q) = (n; 0)$

$\rightarrow$ définie négative si $sg(q) = (0; n)$

$\rightarrow$ indéfinie si $sg(q) = (r; s)$
$\hookrightarrow r + s = n$

Comme $sg(Q_1) = (1; 0)$ mais que Q_1 est dégénérée, alors Q_1 est positive.

⑤ Soit $(a; b) \neq (0, 0)$

$Q_1(a, b) = 0$

$(a + b)^2 = 0$

$$a + b = 0$$

$$a = -b.$$

donc ici il existe $(a, b) \neq (0,0)$ telle que $q_1(a, b) = 0$.

exercice 4 :

$\begin{cases} x \to e_1 \\ y \to e_2 \\ z \to e_3 \end{cases}$

$$q_2(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - yz + z^2$$

① $$M_B q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$2C_2 + C_1$

② $$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \color{salmon}{2C_2+C_1} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_2 + 3C_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $\text{rang}(q_2) = 3$, et

donc q_2 est non-dégénée

③ $q_2(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - yz + z^2$.

$$= \underbrace{1}_{a=1} x^2 + x \times \overbrace{(-y)}^{B} + \overbrace{(y^2 - yz + z^2)}^{C}$$

$$= \left(x + \frac{-y}{2}\right)^2 + (y^2 - yz + z^2) - \frac{(-y)^2}{4}$$

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 - yz + z^2$$

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - yz + z^2$$

$a = \frac{3}{4}$ B C

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{(-z)}{2 \times \frac{3}{4}}\right)^2 + z^2 - \frac{(-z)^2}{4 \times \frac{3}{4}}$$

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{2}{3}z\right)^2 + z^2 - \frac{z^2}{3}$$

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{2}{3}z\right)^2 + \frac{2}{3}z^2$$

4) $sg(q_2) = (3 ; 0)$, donc q_2 est définie positive.

$$q_4(x,y,z) = \frac{1}{8}(x+y+2z)^2 - \frac{1}{8}(x-y)^2 - \frac{1}{4}z^2$$

5 $q_2(a,b,c) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b - \frac{2}{3}c\right)^2 + \frac{2}{3}c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = 0 \\ \frac{3}{4}\left(b - \frac{2}{3}c\right)^2 = 0 \\ \frac{2}{3}c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc il n'existe pas de $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tel que $q_2(a,b,c) = 0$

$$E = F + G$$

$\hookrightarrow$ $\forall x \in E, \exists f \in F, \exists g \in G, \quad x = f + g$

$$E = F \oplus G$$

$\hookrightarrow$ $\forall x \in E, \exists! f \in F, \exists! g \in G, \quad x = f + g.$

<u>Cayley - Hamilton</u> : $\begin{cases} P_A(A) = 0 \\ P_f(f) = 0 \end{cases}$

Feuille TD4

exercice 7 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8$$

$$= (\lambda+2)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4)$$

$$= (\lambda+2) \times -\underbrace{(\lambda^2+4\lambda+4)}_{(\lambda+2)^2}$$

$$= -(\lambda+2)^3$$

une v.p -2 de mul. 3.

$$E_{-2} = \ker(A + 2I_3)$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_1}\right\}.$$

algébrique $\qquad\qquad\qquad\qquad$ géométrique

• $\underbrace{m_a(-2) = 3}_{\text{somme des tailles.}}$ et $\underbrace{m_g(-2) = 1}_{\text{nb de blocs}}$

$$J = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

• on pose $v_2(x, y, z)$:

$$(A + 2I_3)v_2 = v_1$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ -3 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

on trouve $v_2 = (0; -1; 0)$

- on pose $v_3 = (x, y, z)$

$(A + 2I_3) v_3 = v_2$

$\Leftrightarrow$ $v_3 = (-1; 3; 0)$

$x = y - z$

$\underbrace{(1; 1; 0)}_{y}$ $\underbrace{(-1; 0; 1)}_{z}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

inverse triangulaire

$$A^{-1} = P J^{-1} P^{-1}$$

$$A^{n} = P J^{n} P^{-1}$$

D + N avec Newton

$$\boxed{J^{-1} = \frac{1}{\det J} \times \operatorname{com}(J)^{t}}$$