

Feuille 1

• une norme est une application à valeurs positives :

$$\rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

$$\rightarrow \forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\rightarrow \forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

• deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si :

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E$$

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

↳ Les trois normes sont équivalentes.

Feuille 2/3

- $x \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que :
$$D(x, r) \subset A$$

↳ x est un point intérieur à A

- un ensemble A est dit ouvert par tout $x \in A$, il existe un $r > 0$ tel que :

$$D(x, r) \subset A.$$

- $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont ouverts
- une union quelconque d'ouverts est un ouvert
- une intersection finie d'ouverts

est un ouvert.

• $x \in A^\circ \iff$ pour toute suite (x_n) qui converge vers x , il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N, x_n \in A$.

• $x \in \bar{A}$, si $\forall r > 0$ on a :

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

↳ x est un point adhérent à A

• un ensemble est fermée s'il n'est pas ouvert.

• un ensemble A est dit fermé si $\forall x \in A, \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

- E et $\emptyset$ sont fermés
 - une union finie de fermés est fermée
 - une intersection quelconque de fermés est fermée.
 - E_1, E_2 des fermés, alors $E_1 \times E_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in E_1, y \in E_2 \}$ est fermé.
- ↳ la même version ouvert.

• $x \in \bar{A} \iff$ il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x .

- $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

↳ la frontière / le bord

- $A \subset E$ est dense dans E
 $\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tel
 que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

↳ $\overline{A} = E$

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

- $A \subset E$. un ouvert relatif de A est l'intersection d'un ouvert de E et de A

↳ $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_E \cap A$

- $A \subset E$, un fermé relatif de A est l'intersection d'un fermé de E et de A

$$\hookrightarrow \mathcal{F}_A = \mathcal{F}_E \cap A$$

Feuille 4

- $f: A \subset E \rightarrow F$ est

continue en $a \in A$ si pour toute suite $(x_n)_n$ de A qui tend vers a , alors $(f(x_n))_n$ tend vers $f(a)$

$$\hookrightarrow x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$$

• $f: A \subseteq E \rightarrow F$ est continue

en a si f admet une limite en a égale à $f(a)$.

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$

• f' image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.

• f' image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

• une application $f: X \rightarrow Y$
est un homéomorphisme si :

- $\rightarrow f$ continue
- $\rightarrow f$ bijective
- $\rightarrow f^{-1}$ continue.

On dit alors que X et Y
sont homéomorphes.

Feuille 5

- En dimension finie, un compact est un fermé borné.
- $A \subset E$ est bornée s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(x_0, r)$.
- une réunion finie de compacts est compacte.
- une intersection de compacts est compacte.
- un produit cartésien de compacts est compact.

• toute fonction continue sur un compact atteint ses bornes.

↳ f admet un maximum et un minimum globaux.

• A compact et $B \subset A$ fermé, alors B compact.

• $A \subset E$ compacte et $f: A \rightarrow F$ continue et injective.

↳ Alors f est un homéomorphisme de A sur $f(A)$

Fiche 6

- un espace (X, d) est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de X converge.
- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ complet
- $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ complet
- tout e.v de dim. finie est complet.
- $\mathcal{E}([a; b], \|\cdot\|_\infty)$ complet.
- E complet et $A \subset E$, alors A complet $\Leftrightarrow A$ fermé.

• Si E compact, alors E complet.

• f est dit contractante
si f est k -Lipschitzienne
avec $0 < k < 1$.

• Théorème du point fixe :

→ E complet

→ $f : E \rightarrow E$ contractante

Alors f possède un unique
point fixe x_0 , i.e. : $f(x_0) = x_0$.

De plus, toute suite (u_n)
définie par :

$$\left. \begin{array}{l} u_0 \in E \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right\}$$

Alors $(u_n)_n$ converge vers le point fixe de f .

• un ensemble E est connexe

$\Leftrightarrow$ si $E = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 disjoints, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.

$\Leftrightarrow$ si $E = \bar{F}_1 \cup \bar{F}_2$, avec $\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 = \emptyset$ alors $\bar{F}_1 = \emptyset$ et $\bar{F}_2 = \emptyset$.

$\Leftrightarrow$ les seules parties de E ouvertes et fermées à la fois sont E et $\emptyset$.

- L'image d'un connexe par une application continue est connexe.
- $A_1, \dots, A_n$ parties connexes, avec $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i=1}^n A_i$ connexe.
- $A \subset E$ connexe par arcs si $\forall x, y \in A$, il existe un chemin continu de x vers y .

($\hookrightarrow$) un chemin de x vers y est une application $\gamma: [0; 1] \rightarrow A$ telle que :

- γ continue
- $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

- A connexe par arcs $\Rightarrow A$ connexe
- A ouvert d'un evn, alors
 A connexe $\Leftrightarrow A$ connexe par arcs.