

Feuille 3

$\overset{\circ}{A}$: le plus grand ouvert contenu dans A

$\bar{A}$: le plus petit fermé contenant A .

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$$

$$\overset{\circ}{A} = A \iff A \text{ ouvert}$$

$$\bar{A} = A \iff A \text{ fermé.}$$

exercice 1:

c). On suppose $A \subseteq B$.

Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$. Or par hypothèse $A \subseteq B$.

Donc $B(x, r) \subseteq A \subseteq B$, et d'où $\exists r > 0, B(x, r) \subseteq B$.

Donc $x \in \overset{\circ}{B}$, et $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.

• $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B} \Rightarrow A \subseteq B$ FAUX

$$A = [1; 2] \quad B = [1; 2[$$

$$\overset{\circ}{A} =]1; 2[\quad \text{et} \quad \overset{\circ}{B} =]1; 2[$$

$\hookrightarrow \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ mais $A \not\subseteq B$.

d) A et E_x^A

$$\cdot \quad \mathcal{D}A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

$$\text{et } \mathcal{D}A = \overline{A} \cap \overline{E_x^A}$$

$$\text{mais } \overline{E_x^A} = E_x^{\overset{\circ}{A}}$$

$$\text{d'où } \mathcal{D}A = \overline{A} \cap E_x^{\overset{\circ}{A}}$$

$$\cdot \quad \mathcal{D}E_x^A = \overline{E_x^A} \setminus \overset{\circ}{E_x^A}$$

$$\alpha \quad \overline{E_x^A} = E_x^{\overset{\circ}{A}}$$

$$\text{et } \overset{\circ}{E_x^A} = \overline{A}$$

$$\text{d'où } \mathcal{D}E_x^A = \overline{A} \cap E_x^{\overset{\circ}{A}}.$$

exercice 4 :

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, a) : a \in A \}$$

b) . Si $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite $(x_n)_n \in A$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

$$\text{donc } d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

or :

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, a) : a \in A \}$$

$$\leq d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{donc } d(x, A) = 0.$$

• Supposons que $d(x, A) = 0$

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, a) : a \in A \}$$

Par définition de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\exists a \in A$:

$$\inf \leq a < \inf + \varepsilon$$

on pose $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$

et comme $d(x, A) = 0$, on a il existe $a \in A$ tel que

$$0 \leq d(x, a) < \varepsilon$$

en particulier on pose une suite $(a_n)_n \in A^\mathbb{N}$ telle que :

$$0 \leq d(x, a_n) < \frac{1}{n}$$

α par encadrement :

$$0 \leq d(x, a_n) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et d'où $d(x, a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Donc $x \in \overline{A}$.

exercice 3:

$$3) C = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$$

- $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, donc $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

$$\text{Donc } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } C^{\circ} &= \overbrace{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}}^{\circ} \\ &= \overbrace{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}^{\circ} \times \mathbb{R} \\ &= \overbrace{\overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}}^{\circ} \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$= \left(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathcal{E}_{\mathbb{R}} \overline{\mathbb{Q}} \right) \times \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = \emptyset$$

$$= \emptyset \times \mathbb{R}$$

$$= \emptyset.$$

$$\bullet \quad \overline{C} = \overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}}$$

or $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
donc :

$$\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

d'autre :

$$\overline{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$