

## Exercice 3:

### Partie A : Une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$ .

1. Étudier les variations de  $g$ , donner son tableau de variations complet.
2. Montrer qu'il existe un unique  $\alpha \in ]2, 1; 2, 2[$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .
3. Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
4. Étudier le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

Cont.

### Partie B : La fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

3. En déduire le tableau de variations complet de  $f$ .
4. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}.$$

- (b) Montrer que la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote oblique en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- (c) Étudier la position de la courbe représentative de  $f$  avec la droite d'équation  $y = x + 2$ .

## exercice 3 :

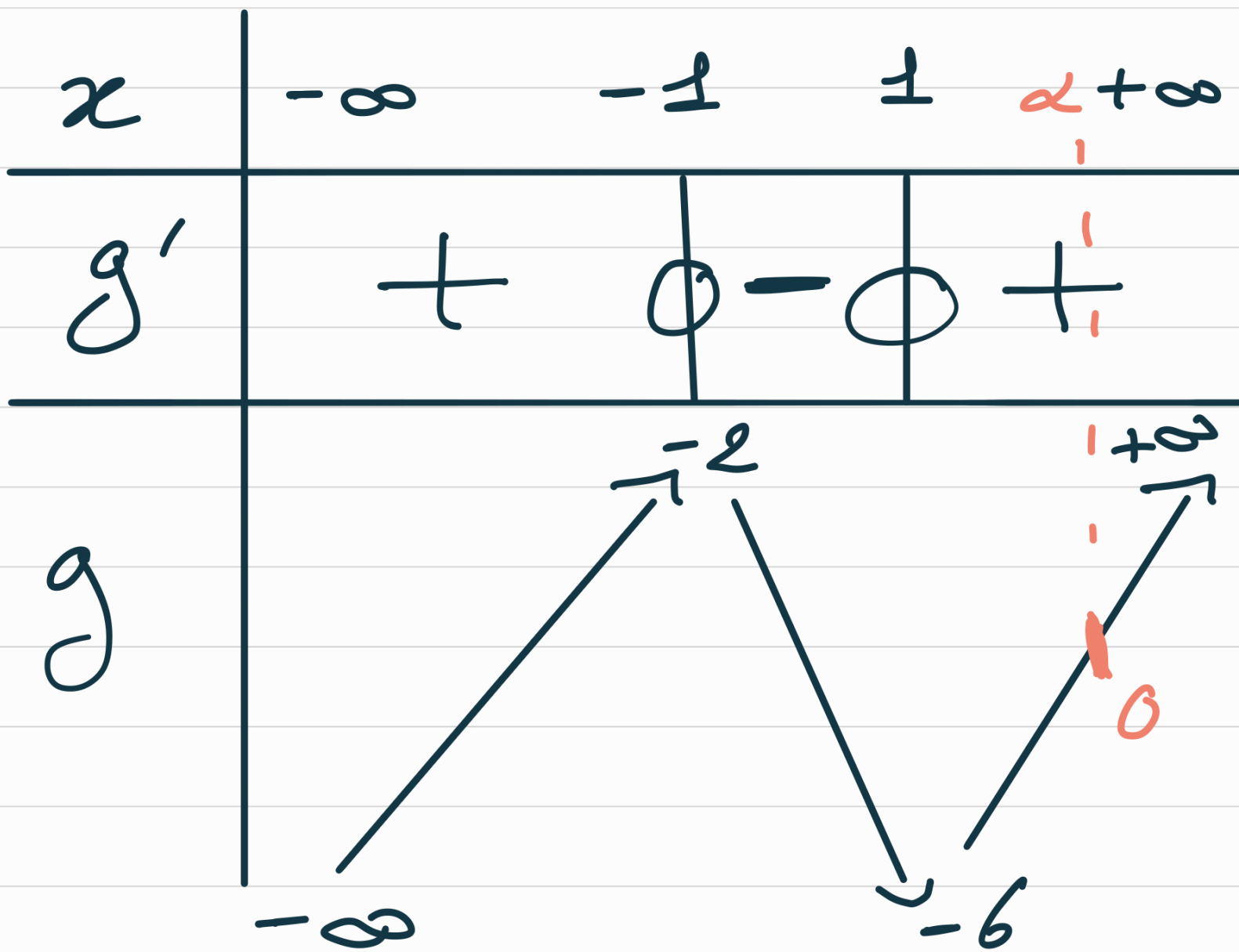
### Partie A :

$$1) g'(x) = 3x^2 - 3$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 3 \times (-3) \\ &= 36 > 0\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 + \sqrt{36}}{2 \times 3} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 - \sqrt{36}}{2 \times 3} = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty - \infty \quad \underline{\text{F.I}}$$

$$\begin{aligned}
 x^3 - 3x - 4 &= x^3 \left( 1 - \frac{3x}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) \\
 &= x^3 \left( 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^3}$$

donc par somme de limites.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) = 1.$$

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ .

Donc par produit de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

De même,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ pair} \\ -\infty & n \text{ impair} \end{cases}$$

4) Donc la fonction  $g$  est négative sur  $] -\infty; \alpha ]$  et positive  $[\alpha; +\infty[$ .

### Partie B : La fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

3. En déduire le tableau de variations complet de  $f$ .
4. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}.$$

- (b) Montrer que la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote oblique en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- (c) Étudier la position de la courbe représentative de  $f$  avec la droite d'équation  $y = x + 2$ .

1) .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} \Rightarrow \text{F.I.}$

$$\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 \left( 1 + \frac{2x^2}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= x \times \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$$

donc par quotient de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

Donc par produit de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De même,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = ?$$

$$\text{on a: } \lim_{x \rightarrow -1^-} x^3 + 2x^2 = (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 1 = 0^+$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{Donc par produit de limites} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

De même,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = ?$

on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 + 2x^2 = 1^3 + 2 \cdot 1^2 = 3$

et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = 0^+$ , d'où

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Donc par produit de limites  
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

De même,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$

$$2) \quad f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (x^3 + 2x^2) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 + \cancel{4x^3} - 4x - 2x^4 - \cancel{4x^3}}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{\textcircled{x} \left( \frac{x^4}{x} - \frac{3x^2}{x} - \frac{4x}{x} \right)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x (x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{\boxed{x g(x)}}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{développer}$$

3)  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2} > 0$

|        |           |           |        |           |           |           |
|--------|-----------|-----------|--------|-----------|-----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-1$      | $0$    | $1$       | $\infty$  | $+\infty$ |
| $x$    | —         |           | $\phi$ | $+$       | $;$       | $+$       |
| $g(x)$ | —         |           | $;$    | —         | $\phi$    | $+$       |
| $f'$   | $+$       | $+$       | $\phi$ | $-$       | $-$       | $+$       |
| $f$    | $-\infty$ | $+\infty$ | $\phi$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |