

Loi Binomiale

• Expériences de Bernoulli:

Succès



probabilité = p

Échec



probabilité = $1 - p$

• Loi de Binomiale

On compte le nombre de succès ou d'échecs de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p).$$

Rédaction :

- Il s'agit d'une expérience à deux issues, le succès est que le client se présente à l'embarquement de probabilité $p = 0,95$. On répète cette expérience 70 fois de manière identique et indépendant.

donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(70; 0,95)$.

- $E(X) = n \times p$

↳ traduction : en moyenne,

- $V(X) = n \times p \times (1-p)$

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exercice 1

Dans cette partie, les réponses seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Un lycéen passe un concours dont la première épreuve est un QCM comportant 12 questions. Pour chaque question, quatre propositions sont données dont une seule exactement est correcte. Ce lycéen n'ayant pas préparé sérieusement l'épreuve ne connaît aucune réponse et répond au hasard et de manière indépendante à toutes les questions. On note X son nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X soit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. ✗
2. Déterminer l'espérance de X et interpréter selon le contexte de l'exercice. ✗
3. Quelle est la probabilité que le lycéen donne exactement 2 bonnes réponses ? ✗
4. Quelle est la probabilité que le lycéen donne au maximum 2 bonnes réponses ? ✗

Les concepteurs de sujet réfléchissent à augmenter le nombre de questions. On note alors n le nombre de questions posées dans cette nouvelle version du questionnaire et p_n la probabilité qu'un élève qui répond au hasard ait au moins une bonne réponse.

5. Justifier que $p_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ✗
- ✗ 6. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. (Aide quelle est la valeur de P_n quand n devient infiniment grand) ✗
7. Déterminer, à l'aide d'un calcul, le nombre de questions que doit comporter le questionnaire pour que la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse si l'on répond à toutes les questions au hasard soit supérieure à 0.99. ✗

1) Il s'agit d'une expérience à deux issues, le succès est que le lycéen ait la bonne réponse de probabilité $\frac{1}{4}$. On répète 12 fois l'expérience de manière identique et indépendante.

Donc X suit $\mathcal{B}(12; \frac{1}{4})$

$$2) E(X) = 12 \times \frac{1}{4} = 3,$$

donc en moyenne le lycéen a 3 bonnes réponses.

$$3) \bullet \text{exactement} \Rightarrow X = k$$

$$\bullet \text{au maximum} \Rightarrow X \leq k$$

$$\bullet \text{au minimum} \Rightarrow X \geq k$$

$$P(X=2) = \binom{12}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{12-2} \\ \approx 0,232$$

donc la probabilité que le

$P_{\text{yc   n}}$ donne exactement deux bonnes réponses est d'environ 0,232.

$$1) P(X \leq 2) \approx 0,862.$$

donc la probabilité que $P_{\text{yc   n}}$ donne au maximum deux bonnes réponses est d'environ 0,862.