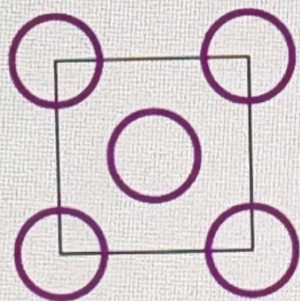


151 Nombres carrés centrés

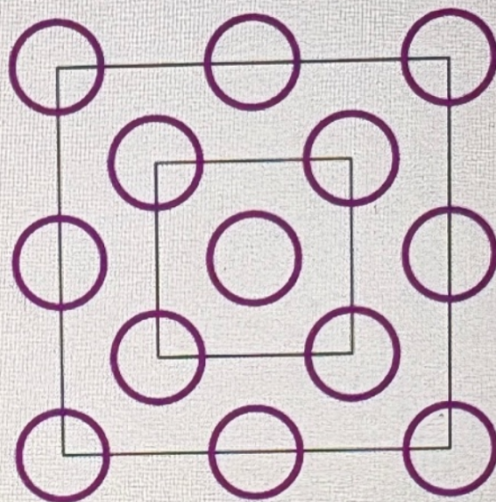
Avec des anneaux, on réalise une succession de motifs géométriques dont on a représenté les trois premiers ci-dessous.



Motif 1



Motif 2



Motif 3

Pour tout nombre entier naturel non nul n , on note c_n le nombre d'anneaux du motif n .

Un entier c_n se nomme « nombre carré centré ».

1. a. Représenter le motif 4 et donner les valeurs de c_1 , c_2 , c_3 et c_4 .

b. Modéliser | Établir une relation de récurrence entre c_{n+1} et c_n .

2. On remarque que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n = 1 + 0 \times 4 + 1 \times 4 + \dots + (n-1) \times 4.$$

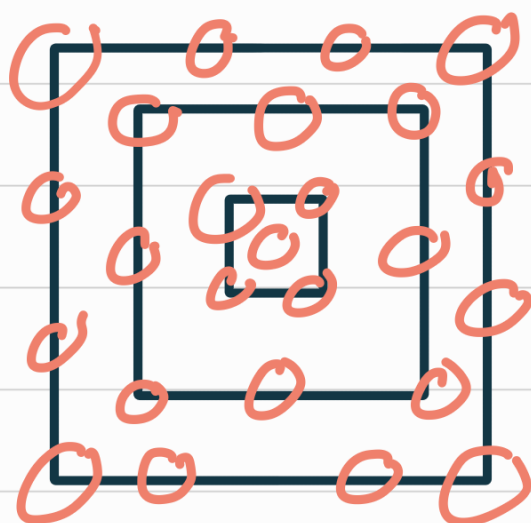
a. On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Prouver que $c_n = 2n^2 - 2n + 1$.

b. Quel est le plus grand nombre carré centré que l'on peut dessiner avec 2 000 anneaux ?

1) a)



$$C_1 = 1$$

$$C_3 = 13$$

$$C_2 = 5$$

$$C_4 = 25$$

b)

$$C_{n+1} = C_n + 4n$$

2. On remarque que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n = 1 + 0 \times 4 + 1 \times 4 + \dots + (n-1) \times 4.$$

a. On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Prouver que $c_n = 2n^2 - 2n + 1$.

b. Quel est le plus grand nombre carré centré que l'on peut dessiner avec 2 000 anneaux ?

2) a)

$$\begin{aligned} c_n &= 1 + 0 \times 4 + 1 \times 4 + \dots + (n-1) \times 4 \\ &= 1 + 0 \times 4 + 4(1 + \dots + (n-1)) \\ &= 1 + 4 \times \frac{n(n-1)}{2} \\ &= 1 + 2n(n-1) \\ &= 1 + 2n^2 - 2n \\ &= 2n^2 - 2n + 1. \end{aligned}$$

b)

$$C_n \leq 200$$

$$2n^2 - 2n + 1 \leq 200$$

$$n_1 = -31 \quad \times$$

$$n_2 = 32$$

Donc le plus grand entier
est $n = 32$ et $C_{32} = 1985$.

