Feuille 4

exercice 4 :

a) • Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\|f(x)\|_2 = \frac{\|x\|_2}{1+\|x\|_2} < \frac{\|x\|_2}{\|x\|_2} = 1$$

car $1 + \|x\|_2 > \|x\|_2$.

Donc $f(x) \in B_2(0,1)$.

• $x \longmapsto \|x\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, $x \longmapsto 1 + \|x\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ et strictement positive, ~~donc~~ $\cancel{x \longmapsto \dfrac{1}{1+\|x\|_2}}$

~~est continue sur~~ $\cancel{\mathbb{R}}$ ~~car le~~

~~dénominateur ne s'annule pas~~

Enfin, $x \longmapsto x$ continue sur $\mathbb{R}^n$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^n$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

• Soit $y \in B_2(0,1)$.

on cherche $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x) = y.$$

$$\frac{x}{1+\|x\|_2} = y$$

$$x = \underbrace{(1+\|x\|_2)}_{\in \mathbb{R}} y$$

on remarque que x doit être colinéaire à y.

on pose $x = \lambda y, \quad \lambda > 0$

alors on a $f(x) = f(\lambda y)$

$$= \frac{\lambda y}{1 + \|\lambda y\|_2}$$

$$= \frac{\lambda y}{1 + \lambda \|y\|_2}$$

or $f(x) = y \in B_2(0, 1)$

d'où $y = \dfrac{\lambda y}{1 + \lambda\|y\|_2}$ $\div y$

$\iff 1 = \dfrac{\lambda}{1 + \lambda \|y\|_2}$ $y \neq 0$

$\iff 1 + \lambda \|y\|_2 = \lambda$

$\iff 1 = \lambda (1 - \|y\|_2)$

or comme $\|y\|_2 < 1$,
alors $1-\|y\|_2 \neq 0$ et on pose :

$$\lambda = \frac{1}{1-\|y\|_2} > 0$$

donc $x = \lambda y = \dfrac{y}{1-\|y\|_2}$.

<u>bil</u> : $y = f(x) \iff x = g(y)$

on pose $g(y) = \dfrac{y}{1-\|y\|_2}$.

<u>Vérification</u> :

- $$f(g(y)) = \frac{g(y)}{1+\|g(y)\|_2}$$

$$= \frac{\dfrac{y}{1-\|y\|_2}}{1-\left\|\dfrac{y}{1-\|y\|_2}\right\|_2} = \frac{\dfrac{y}{1-\|y\|_2}}{1-\dfrac{\|y\|_2}{1-\|y\|_2}}$$

$$= \frac{\frac{y}{1-\|y\|_2}}{\frac{1-\cancel{\|y\|_2}+\cancel{\|y\|_2}}{1-\|y\|_2}}$$

$$= \frac{y}{\cancel{1-\|y\|_2}} \times \frac{\cancel{1-\|y\|_2}}{1} = y.$$

<u>et</u> $g(f(x))$

$$= \frac{f(x)}{1-\|f(x)\|_2} = \frac{\frac{x}{1+\|x\|_2}}{1-\frac{\|x\|}{1+\|x\|_2}}$$

$$= \frac{x}{\cancel{1+\|x\|_2}} \times \frac{\cancel{1+\|x\|_2}}{1}$$

$$= x$$

donc f est bijective

et $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-\|y\|_2}$.

$f^{-1} : B_2(0,1) \to \mathbb{R}^n$

- $y \longmapsto \|y\|_2$ est continue sur $B_2(0,1)$ $y \longmapsto 1-\|y\|_2$ est continue sur $B_2(0,1)$ et strictement positive et $y \longmapsto y$ est continue sur $B_2(0,1)$. Donc f^{-1} est continue sur $B_2(0,1)$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Donc f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $B_2(0,1)$.

3) • $\cos(t)$ et $\sin(t) \leq 1$
donc $\forall t \in [0 ; 2\pi[$, $f(t) \in Y$.

• Les fonction cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0 ; 2\pi[$.
Donc l'application $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur X.

• Injective : on suppose $f(t_1) = f(t_2)$
alors :
$$(\cos(t_1), \sin(t_1)) = (\cos(t_2), \sin(t_2))$$

$$\iff \begin{cases} \cos(t_1) = \cos(t_2) \\ \sin(t_1) = \sin(t_2) \end{cases}$$

Sur l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, cela correspond à un seul angle.
Donc $t_1 = t_2$ et f injective.

Surjectivité : $\forall y \in Y = \mathcal{C}(0,1)$, on peut lui associer un unique couple $(\cos(t), \sin(t))$ avec $t \in [0; 2\pi[$ donc f est surjective.

Donc f est bijective de X dans Y.

Donc f est continue et bijective.

Supposons par l'absurde que f^{-1} est continue.

Alors pour toute suite $(y_n) \in Y^{\mathbb{N}}$ convergeante vers $y \in Y$, on aurait :

$$f^{-1}(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{|\cdot|} f^{-1}(y) \in X$$

on pose $x_n = 2\pi - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

- $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$.
- $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\pi \notin X$.

on regarde : $y_n = f(x_n)$

on a $f(x_n) = \left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right)$

or $\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \cos(2\pi) = 1$

$\sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sin(2\pi) = 0$.

donc $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (1, 0) = f(0) \in Y$.

Donc $(y_n)_n$ admet une limite $y = f(0) \in Y$.

Si f^{-1} était continue, alors on aurait :

$$f^{-1}(y_n) = x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f^{-1}(f(0)) = 0$$

or $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\pi \notin X$

Contradiction

Donc f^{-1} n'est pas continue, et donc f n'est pas un homéomorphisme de X dans Y.