

Feuille 5

exercice 1:

e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$

$D = f^{-1}([-\infty; 1])$

avec $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto x^2 + y^2.$

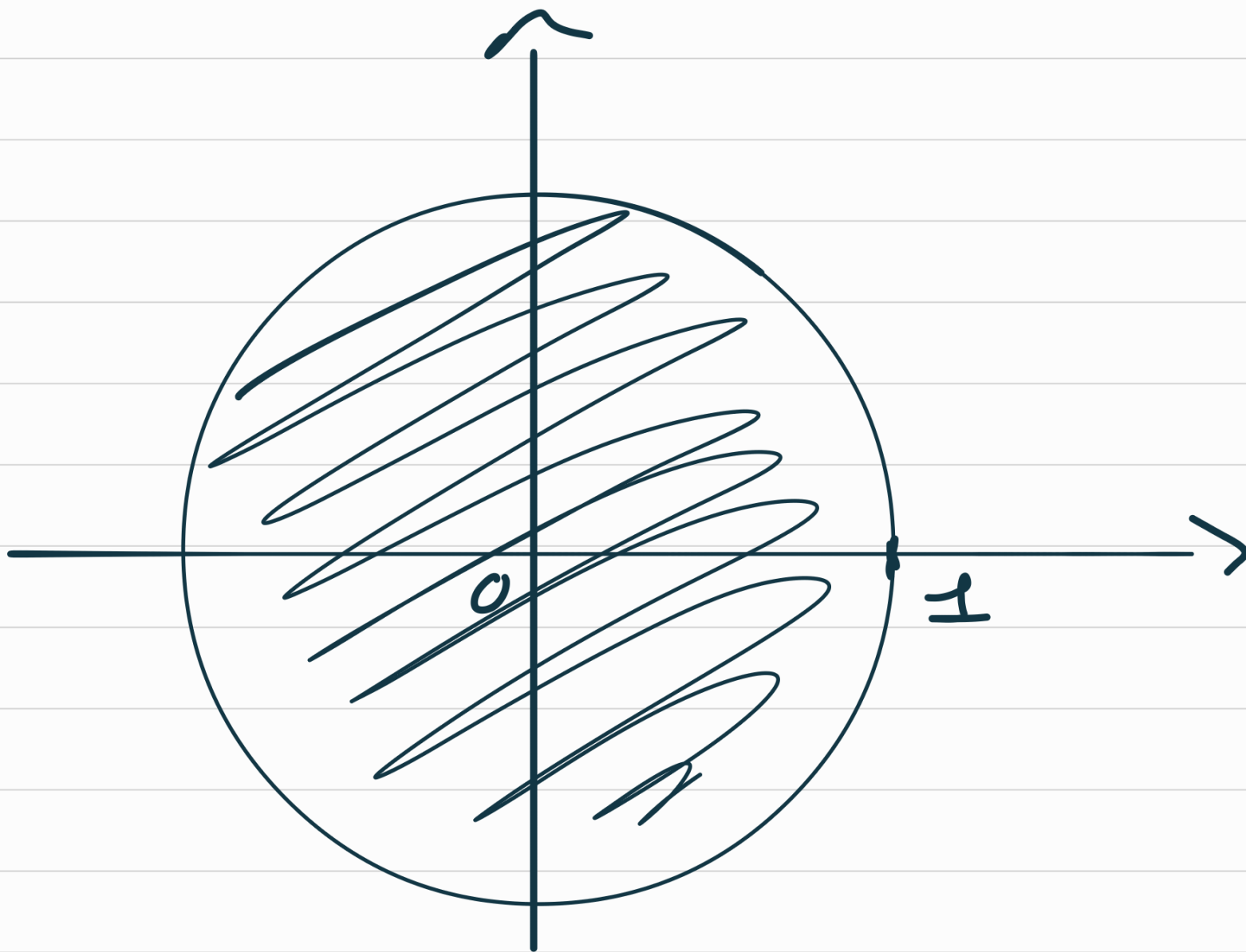
or f est continue sur $\mathbb{R}^2$
comme polynôme et $[-\infty; 1]$
est un fermé de $\mathbb{R}.$

Donc D est un fermé
de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque
d'un fermé de $\mathbb{R}$ par
une application continue.

• $D \subset D((0,0); 2)$ donc

D est borné.

Donc D est un compact
de $\mathbb{R}^2$.



a) $H_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = \pm 1, |x+y| \leq a\}$
avec $2 \leq a < \infty$.

$$H_a = \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \pm 1\}}_{H_{\pm}} \cap \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leq a\}}_{H_2}$$

• $H_{\pm} = f^{-1}(\{\pm 1\})$ avec

$$f: (x, y) \mapsto xy \text{ continue sur } \mathbb{R}^2$$

car $\{\pm 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Donc $H_{\pm}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.

- $H_2 = f^{-1}(]-\infty; a])$ avec

$$f: (x, y) \mapsto |x + y| \text{ continue sur } \mathbb{R}^2.$$

or $] -\infty; a]$ fermé de $\mathbb{R}$.

Donc H_2 est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.

Donc H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de deux fermés de $\mathbb{R}^2$.

- $xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}, x \neq 0$

et $|x + y| \leq a \Leftrightarrow |x + \frac{1}{x}| \leq a$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \leq a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \leq a^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} \leq a^2 - 2$$

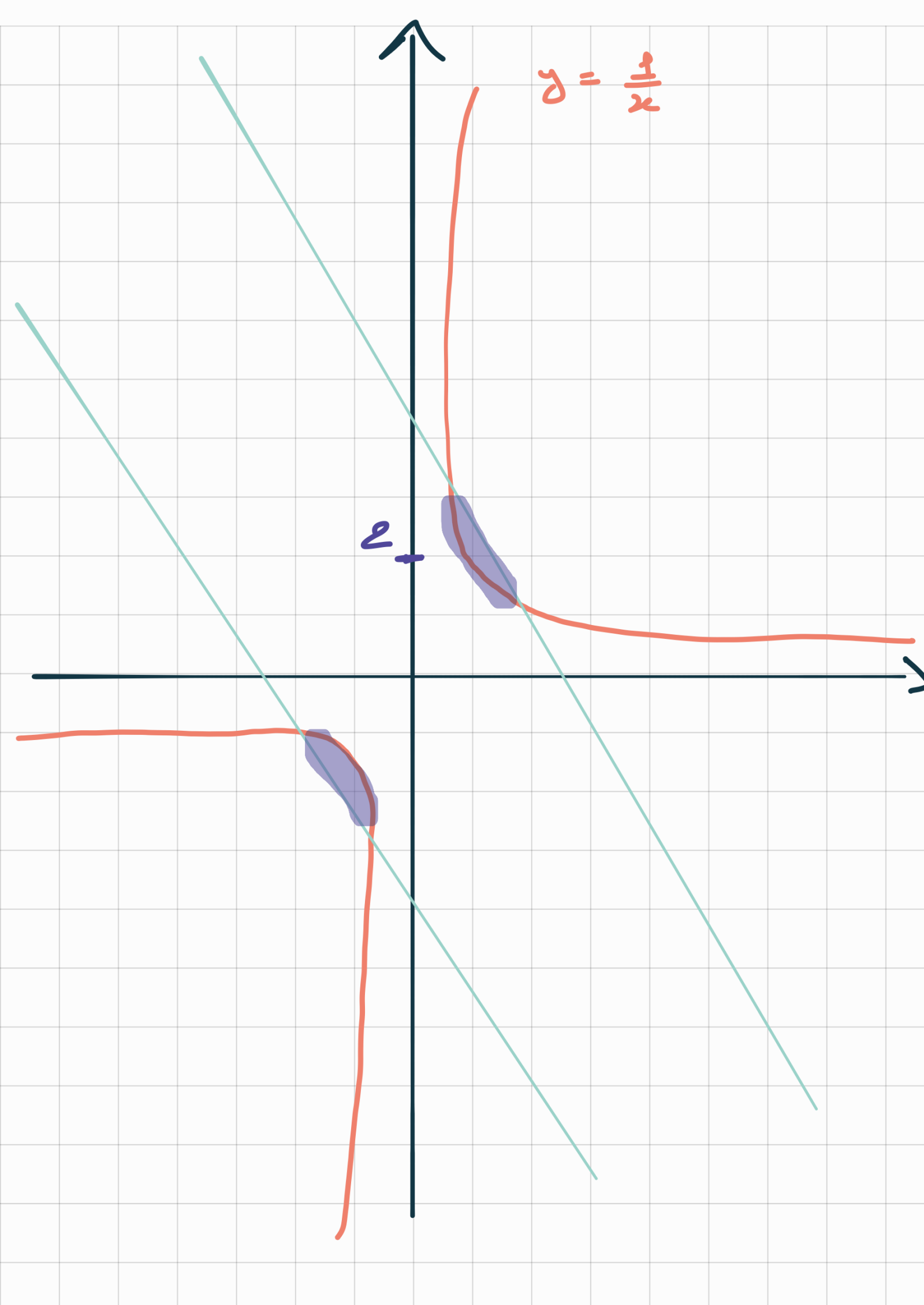
$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq a^2 - 2$$

or $a \geq 2$, donc $a^2 - 2 \geq 2 > 0$

donc $H_a \subset B((0,0), \sqrt{2(a^2 - 2)})$

et donc H_a est bornée.

Donc H_a est un compact.



exercice 3:

a) $f(x, y) = \frac{\sin(x)}{y}$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}.$$

b) $K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}$

$$= f_1^{-1}([1; +\infty[)$$

avec $f_1: (x, y) \mapsto y$ continue sur $\mathbb{R}^2$.

et $[1; +\infty[$ fermé de $\mathbb{R}$.

donc K_1 est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.

$$K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq e^{x^2} + y \leq 4\}$$

$$= f^{-1}([-1; 4])$$

avec $f(x, y) = e^{x^2} + y$ continue sur $\mathbb{R}^2$.

et $[-1; 4]$ fermé de $\mathbb{R}$.

Donc K_2 est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.

Donc $K = K_1 \cap K_2$ est
un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x, y) \in K$

$$\bullet \quad e^{x^2} + y \leq 4$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} \leq 4 - y \leq 4 - 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq \ln(3) \quad (\Rightarrow |x| \leq \sqrt{\ln(3)})$$

$$\bullet \quad e^{x^2} + y \leq 4$$

$$\Leftrightarrow y \leq 4 - e^{x^2}$$

$$\leq 4 - 1 \quad \text{car } e^{x^2} \geq 1.$$

$$\leq 3$$

$$\text{donc } 1 \leq y \leq 3$$

et en particulier $y^2 \leq 9$

d'où $x^2 + y^2 \leq h(3) + 9$

donc $K \subset B((0,0); \sqrt{h(3)+9})$

Remarque: $x \in [-\sqrt{h(3)}; \sqrt{h(3)}]$

$$y \in [-3; 3].$$

$$K \subset [-\sqrt{h(3)}; \sqrt{h(3)}] \times [-3; 3]$$

Donc K est bornée, et donc K est un compact.

c) f est bien définie

sur K car $y \geq 1 > 0$

$(x, y) \mapsto y$ est continue et strictement positive sur K .

$(x, y) \mapsto \sin(x)$ est continue sur K .

Donc f est continue sur K comme quotient de fonctions continues sur K dont le dénominateur ne s'annule pas.

Or K est compact.

Donc la fonction f admet un maximum global sur K .