

Loi Binomiale

Exercice 1

Dans cette partie, les réponses seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Un lycéen passe un concours dont la première épreuve est un QCM comportant 12 questions. Pour chaque question, quatre propositions sont données dont une seule exactement est correcte. Ce lycéen n'ayant pas préparé sérieusement l'épreuve ne connaît aucune réponse et répond au hasard et de manière indépendante à toutes les questions. On note X son nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X soit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. ✗
2. Déterminer l'espérance de X et interpréter selon le contexte de l'exercice. ✗
3. Quelle est la probabilité que le lycéen donne exactement 2 bonnes réponses ? ✗
4. Quelle est la probabilité que le lycéen donne au maximum 2 bonnes réponses ? ✗

Les concepteurs de sujet réfléchissent à augmenter le nombre de questions. On note alors n le nombre de questions posées dans cette nouvelle version du questionnaire et p_n la probabilité qu'un élève qui répond au hasard ait au moins une bonne réponse.

5. Justifier que $p_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ✗
- ✗ 6. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. (Aide quelle est la valeur de P_n quand n devient infiniment grand) ✗
7. Déterminer, à l'aide d'un calcul, le nombre de questions que doit comporter le questionnaire pour que la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse si l'on répond à toutes les questions au hasard soit supérieure à 0.99. ✗

5) au moins $\Rightarrow X \geq 1$

au plus $\Rightarrow X \leq 1$

$$P_n = \mathbb{P}(X \geq 1)$$

$$= 1 - P(X=0).$$

Loi Binomiale

$$\text{C, } P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - \cancel{\binom{n}{0}} \cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^0} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{n-0}$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$P(X=0) = (1-p)^n$$

$$6) P_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \quad \text{car } \frac{3}{4} < 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \text{pas limite} & q \leq -1 \end{cases}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 1 - 0 = 1$

Exercice 2

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60 % des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les jeux Olympiques et Paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision ;
- parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les événements suivants :

- J : « la personne a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision » ;
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière ».

On note $\bar{J}$ et $\bar{S}$ leurs événements contraires.

Dans les questions 1. et 2., les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Démontrer que la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\frac{8}{15}$.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

$$P(S) = \frac{2}{3}$$

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

2. a. Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.

- b. En déduire la probabilité de S sachant $\bar{J}$ notée $P_{\bar{J}}(S)$.

$$\frac{P(\bar{J} \cap S)}{P(S)} = \frac{2}{5}$$

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millièm.

3. Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.

On assimile ce choix à un tirage avec remise.

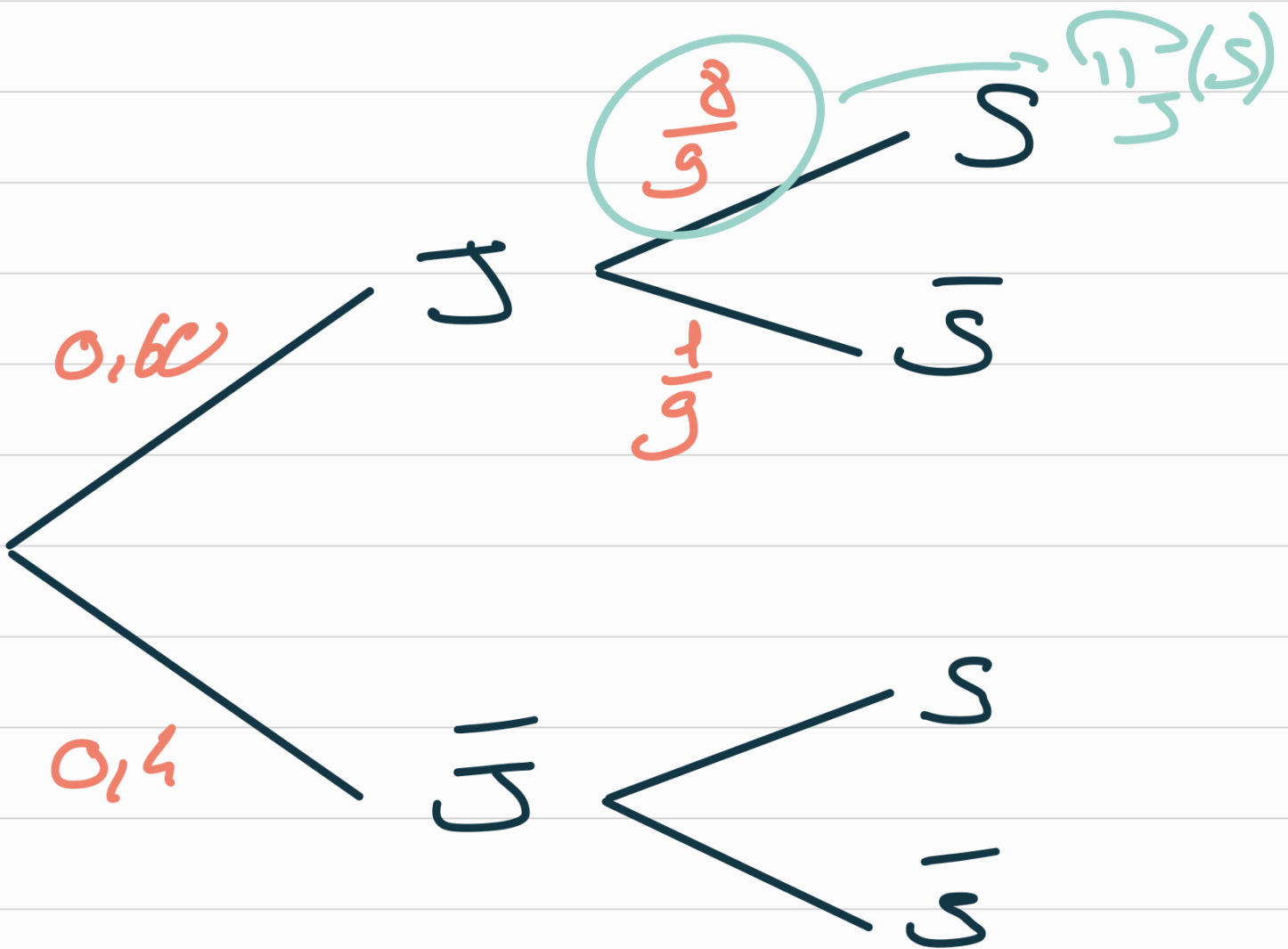
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

- a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X . ✗
- b. Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes. ✗

- c. La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.

Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 euros pour cette opération.

Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant? ✗



$$1) P(J \cap S)$$

$$= P(J) \times P_J(S)$$

$$= 0,6 \times \frac{8}{9}$$

$$= \frac{8}{15}$$

done la probabilité ...

2) On cherche $P(\bar{J}nS)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(JnS) + P(\bar{J}nS)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{15} + \underbrace{P(\bar{J}nS)}_?$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } P(\bar{J}nS) &= \frac{2}{3} - \frac{8}{15} \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

donc ...

$$3) P(\bar{J}|S) = \frac{P(Sn\bar{J})}{P(S)}$$

$$= \frac{2/15}{0,4} = \frac{1}{3}$$

donc ...

3. Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.

On assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

- Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X . ✕
- Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes. ✕
- La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.

Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 euros pour cette opération.

Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant? ✕

3) a)

Il s'agit d'une expérience à deux issues, le succès est que la personne pratique une activité sportive de probabilité $\frac{2}{3}$;

On repère 30 fois p
expérience de manière
identique et indépendante.

Donc X suit $\mathcal{B}(30; \frac{2}{3})$.

3) $\mathbb{P}(X = 16) \simeq 0,046$

donc ...

c) $\cdot \frac{10 \text{ ans}}{380} \simeq 26$

A partir de 27 places
on dépasse le budget.

• $\mathbb{P}(X \geq 27) \simeq 0,003$