

Limites de Suites

Exercice 43:

$$v_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ +\infty & q > 1 \end{cases}$$

$$v_n = \frac{3 \times 3^n}{2^n} = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\text{or } -1 < \frac{3}{2} < 1, \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = 0$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

exercice 44:

$$X \sim \mathcal{D}\left(n; \frac{1}{6}\right)$$

a) $P_n = \mathbb{P}(X \geq 1)$
 $= 1 - \mathbb{P}(X=0)$
 $= 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n$

$$X \sim \mathcal{P}(n; p)$$

$$\text{E, } P(X=0) = (1-p)^n.$$

$$P_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\text{b) } P_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\text{on a: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0,$$

$$\text{car } -1 < \frac{5}{6} < 1.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 1.$$

Limite de suite et forme indéterminée

Dans chaque cas, déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) :

a) $u_n = n^3 - 3n^2$

b) $u_n = \frac{n^2 - 2n}{n + 1}$

c) $u_n = \frac{n^2 + n}{1 - n^2}$

a) $u_n = n^3 - 3n^2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$\begin{aligned} u_n &= n^3 - 3n^2 \\ &= n^3 \left(1 - 3 \frac{n^2}{n^3} \right) \\ &= n^3 \left(1 - \frac{3}{n} \right) \end{aligned}$$

$\alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$, et

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{n} = 1$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$.

donc par produit de
limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3) $u_n = \frac{n^2 - 2n}{n + 1}$

$$= \frac{n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= n \times \frac{1 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}.$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1.$$

Donc par quotient de
limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$

Donc par produit de
limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = +\infty.$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$

exercice b :

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n + \sqrt{\frac{1}{n+1}}.$$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n+1}}}_{>0} + n \geq n$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

$$u_n \leq v_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \\ \Rightarrow \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

donc par comparaisons,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \sqrt{\frac{1}{n+1}} = +\infty.$$

$$u_n \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$

$$\Rightarrow \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

$$\begin{array}{c} +\infty \\ \swarrow \\ u_n \leq u_n \leq v_n \\ \searrow \quad \swarrow \\ -\infty \end{array}$$

exercice 93:

a) on peut conjecturer
que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

b) $u_n (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

$$= (\underbrace{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}_{a-b}) (\underbrace{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}_{a+b})$$

$$= (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2$$

$$= n+1 - n$$

$$= 1$$

c) $u_n \times (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 > 0$

$$0 \leq u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

or $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, donc

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n}$$

d'aut : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

d) $\forall n > 1, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$, donc par

encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.