

Suites

Exercice 1 :

Une médiathèque a ouvert début 2017 et 3 000 personnes se sont inscrites durant la première année. Chaque année, 75 % des inscrits renouvellent leur abonnement et 500 nouvelles adhésions ont lieu.

On modélise la situation par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , où $u_0 = 3000$ est le nombre d'adhérents en 2017 et u_n est le nombre d'inscrits l'année 2017 + n .

1) a) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 0,75u_n + 500$.

b) Montrer que la suite u_n n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) On considère l'algorithme suivant écrit en langage Python.

Faire tourner l'algorithme et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2000$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction n , puis celle de u_n en fonction n .

c) Vérifier alors le résultat obtenu à la question 2).

```
def inscrits():
```

```
    n = 0
```

```
    u = 3000
```

```
    while u > 2100:
```

```
        n = n + 1
```

```
        u = 0,75u + 500
```

```
    return 2017 + n
```

1) a) Comme 75 % des inscrits qui renouvellent leur abonnement, alors $u_{n+1} = 0,75u_n$. Et comme de plus, 500 nouveaux inscrits, alors :

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 500$$

b) $u_0 = 3000$

$$u_1 = 0,75 \times \underbrace{3000}_{u_0} + 500 \\ = 2750$$

$$u_2 = 0,75 u_1 + 500 \\ = 0,75 \times 2750 + 500 \\ = 2562,5.$$

$$\bullet \quad \begin{array}{l} u_2 - u_0 = -250 \\ u_2 - u_1 = -187,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \neq$$

donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\bullet \frac{u_1}{u_0} \approx 0,9167$$

$$\frac{u_2}{u_1} \approx 0,9312$$

↗ ≠

donc (u_n) n'est pas géométrique.

2) $\bullet u_n \leq 2100$ à partir de $n = 9$.

P' algorithme donne $2017+9 = 2026$.

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 2000$ ①

$$= 0,75u_n + 500 - 2000$$

$$= 0,75u_n - 1500$$

②

$$= 0,75 \left(u_n - \frac{1500}{0,75} \right) \quad \text{③}$$

$$= 0,75 (u_n - 2000)$$

$$= 0,75 v_n$$

donc $(v_n)_n$ est géométrique
de raison $0,75$ et de
premier terme $v_0 = u_0 - 2000$
 $= 3000 - 2000$
 $= 1000.$

$$\textcircled{3} \bullet v_n = v_0 \times (0,75)^n$$

$$v_n = 1000 \times (0,75)^n$$

$$\bullet v_n = u_n - 2000 \Leftrightarrow u_n = v_n + 2000$$

$$u_n = 1000 \times (0,75)^n + 2000$$

$$c) u_n = 1000 \times (0,75)^n + 2000.$$

$$u_8 = 1000 \times (0,75)^8 + 2000$$

$$\simeq 2100, 11 > 2000$$

$$u_9 = 1000 \times (0,75)^9 + 2000$$

$$\simeq 2015, 08 \leq 2000$$

donc on retrouve le
résultat de la question 2).

Exercice 5 :

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.

L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif.

Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif.

On interroge un élève au hasard dans le lycée. On considère les événements suivants :

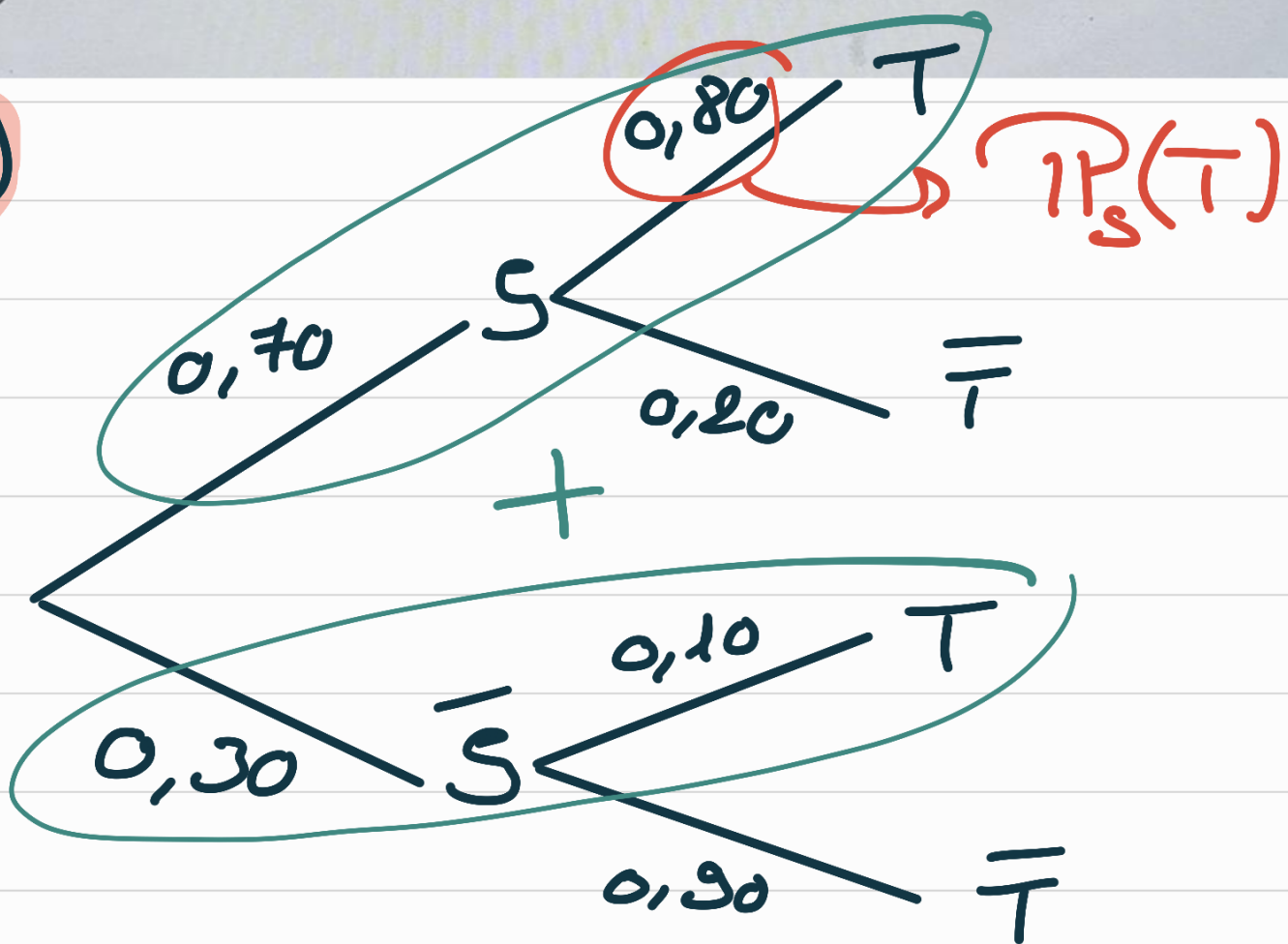
S : L'élève interrogé est sensible au développement durable.

T : L'élève interrogé pratique le tri sélectif.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} .

- 1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
- 2) Calculer la probabilité que l'élève interrogé soit sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.
- 3) Montrer que la probabilité que l'élève interrogé pratique le tri sélectif est 0,59.
- 4) On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif.

Peut-on affirmer que les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont inférieures à 10% ?



2) $P(S \cap T)$

$$= P(S) \times P_S(T) = 0,70 \times 0,80 = 0,56.$$

donc la probabilité ...

3) D'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(S \cap T) + P(\bar{S} \cap T) \\ &= P(S) \times P_S(T) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(T) \\ &= 0,56 + 0,30 \times 10 \\ &= 0,56 + 0,03 \\ &= 0,59. \end{aligned}$$

donc la probabilité ...

$$4) P(\overline{T} | S) = \frac{P(S \cap \overline{T})}{P(\overline{T})}$$

$$= \frac{0,30 \times 0,10}{1 - P(T)}$$

$$= \frac{0,30 \times 0,10}{1 - 0,59} \approx 0,07$$

donc la probabilité que l'élève soit sensible au kri est de $0,07 < 0,10$.

Donc oui c'est inférieur à 10%.