

Limites de Fonctions

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 5}$$

$$1) \frac{2x - 1}{x^2 + 5} = \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2} \right)}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x^2}}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2}.$$

cl'ai $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{5}{x^2} = 1$

donc par quotient de limites,
on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x^2}} = 2$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ainsi par produit de limites,
on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x^2}} = 0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 5} = 0$.

2) De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^4+5} = 0$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 1)$

$$= x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$$

donc par produit de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 1 = +\infty$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + x - 2}$.

Combien d'asymptotes possède la courbe représentative de cette fonction? Déterminer leur équation.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asympt. horizontale d'équation $y = l$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

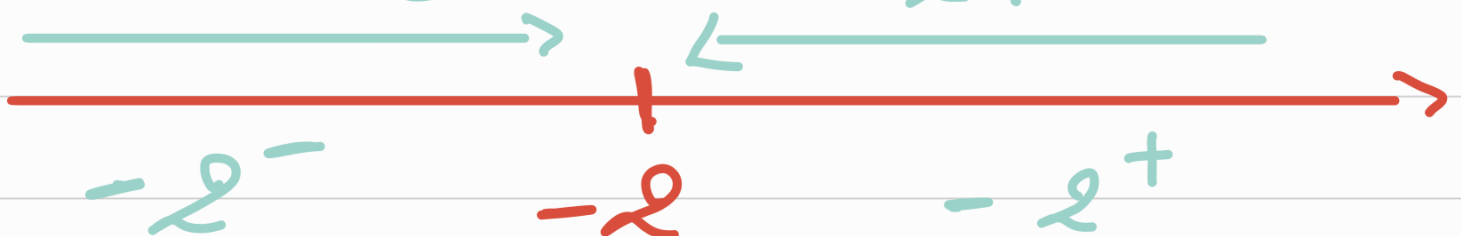
$\hookrightarrow$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$

$$\Leftrightarrow x - 2 < 0$$

$$x < -2$$

$$x - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -2$$



$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\textcircled{a} \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Donc E_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$

x	$-\infty$	-2^-	-2^+	-1	1^+	$+\infty$
x^2+x-2		$+$	$-$		$+$	

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + x - 2} = -\infty$$

$$e, (-2)^2 + 5 \times (-2) + 1 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + x - 2 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x^2 + x - 2} = +\infty$$

donc par produit de limites

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + x - 2} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + x - 2} = -\infty$$

$$\hookrightarrow 1^2 + 5 \times 1 + 1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x - 2 = 0^-$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 + x - 2} = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Donc E_f admet deux
asymptotes verticales d'équations
respectives $x = -2$ et $x = 1$

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3x^2 + 5x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x + 4e^x + 3x}{e^{2x} + e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{28x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 3x^2 + 5x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3xe^x + 4e^x + 3x}{e^{2x} + e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x}}{28x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{-x} - x)$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

(Handwritten note: $x e^{-x}$ with an arrow pointing to the denominator e^x)

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

$$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + x} = ?$$

$$\frac{e^x - 1}{e^x + x} = \frac{\cancel{e^x} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{x}{e^x}}$$

$$\propto \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^x} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{e^x} = 1$$

Donc par quotient de
Limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + x} = 1.$$