

Devoir

exercice 1:

1) a) $\vec{AB}(-2; 2; -2)$

$\vec{AC}(-3; -1; -1)$

$$\cdot \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \quad \cdot \frac{2}{-1} = -2$$

$\swarrow \quad \quad \quad \searrow$
 $\neq$

donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$
ne sont pas colinéaires et
donc les points A, B, C ne sont
pas alignés.

$$b) \quad AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2}$$

$$= 2\sqrt{3}.$$

$$AC = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{11}.$$

$$c) \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 \times (-3) + 2 \times (-1) + (-2) \times (-1)$$

$$= 6$$

$$\cdot \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$$

$$6 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{11} \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$$

$$\text{donc } \cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$$

$$\text{et d'où } \widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{\sqrt{33}}{11}\right) \\ \simeq 58,5^\circ.$$

2) a) • (AB) :

$$\begin{cases} x = 2 + (-2)t \\ y = 0 + 2t, \underline{t \in \mathbb{R}} \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$(AB) : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 1 = 2 - 2t \\ 1 = 2t \\ 2 = 3 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc $E(1; 1; 2) \in (AB)$.

- montrer que $(EC) \perp (AB)$

$$\vec{AB}(-2; 2; -2)$$

$$\vec{EC}(-2; -2; 0)$$

$$\{ \vec{AB} \cdot \vec{EC} = (-2) \times (-2) + 2 \times (-2) + (-2) \times 0$$

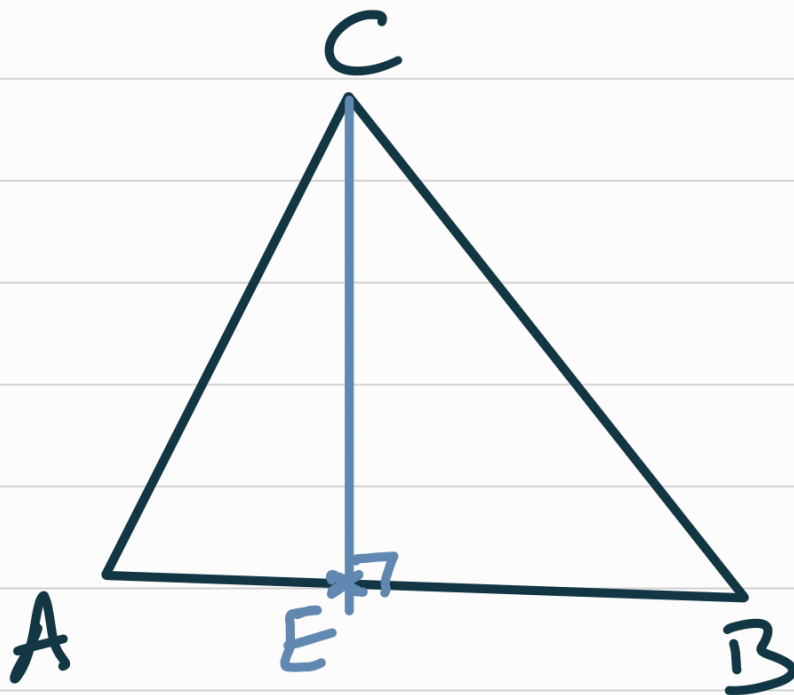
$$= 4 - 4 + 0 = 0$$

donc les vecteurs $\vec{EC}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux, et donc la droite (EC) est perpendiculaire à (AB) .

Donc E est le projeté de

C sur la droite (AB).

3)



$$\begin{aligned} \text{aire}(ABC) &= \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} \\ &= \frac{AB \times CE}{2} \end{aligned}$$

(car E est $\perp$ de C)

$$= \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + c^2}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} \times \cancel{2}\sqrt{2} / \cancel{2}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

3) a) Montrer que $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AF}$ sont coplanaires.

$$\vec{AB}(-2; 2; -2) \quad \vec{AC}(-3; -1; -1)$$

$$\vec{AF}(-1; -1; 0)$$

Essayons d'écrire

$$\vec{AB} = \alpha \vec{AC} + \beta \vec{AF}$$

$$\begin{cases} -2 = -3\alpha - \beta \\ 2 = -\alpha - \beta \\ -2 = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -3\alpha - \beta \\ 2 = -2 - \beta \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -3 \times 2 - (-4) \\ \beta = -4 \\ 2 = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} = -6 + 4 \\ \end{matrix}$$

donc $\vec{AD} = 2\vec{AC} - \vec{AF}$,

et donc les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AF}$ sont coplanaires et donc les points A, B, C, F sont coplanaires.

b) $\vec{FD}(2; -2; -4)$

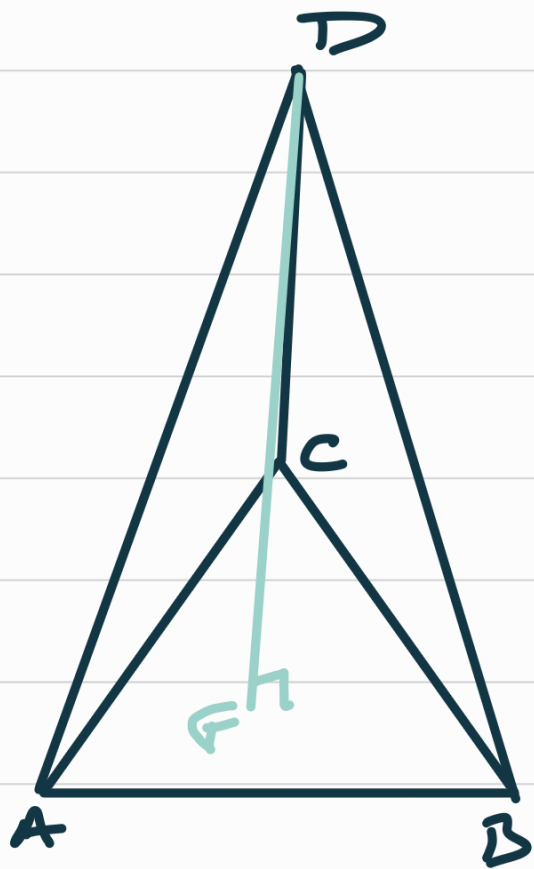
$$\bullet \vec{FD} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\bullet \vec{FD} \cdot \vec{AC} = 0$$

donc (FD) est orthogonale au plan (ABC)

$$c) \quad V = \frac{\text{aire}(\text{base}) \times h}{3}.$$

$$\text{aire}(\text{base}) = \text{aire}(ABC) = 2\sqrt{6}.$$



Comme A, B, C, F sont coplanaires, alors $F \in (ABC)$, et de plus la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC) .

Donc F est le projeté

orthogonal de D sur (ABC) .

Donc une hauteur du tétraèdre $ABCD$ est FD .

$$\begin{aligned} \bullet \quad FD &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2} \\ &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Donc :

$$V(ABCD) = \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{30}}{3}.$$

exercice 2:

$$\begin{aligned} 1) \cdot \frac{3x-1}{x-2} &= \frac{\cancel{x} \left(3 - \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x} \left(1 - \frac{2}{x}\right)} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \end{aligned}$$

$$\alpha \quad \lim_{x \rightarrow \underline{+\infty}} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow \underline{+\infty}} \frac{2}{x}$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow \underline{+\infty}} 3 - \frac{1}{x} = 3 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow \underline{+\infty}} 1 - \frac{2}{x} = 1.$$

Donc par quotient de limites,

$$\lim_{x \rightarrow \underline{+\infty}} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{3}{1} = 3.$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3.$

	$x < 2$		$x > 2$	
	2^-		2^+	
	2^-		2^+	
x	$-\infty$	2	2	$+\infty$
signe $x-2$	-		+	

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^-$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{0^+} = +\infty$$

donc par produit de limites,
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow \mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$

$\hookrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$, et une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

$$2) \quad f'(x) = \frac{3(x-2) - (3x-1) \times 1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{3x - 6 - 3x + 1}{(x-2)^2}$$

$$= -5/(x-2)^2 < 0$$

