

Variations de Suites

- une suite (u_n) est croissante si $u_n \leq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- une suite (u_n) est décroissante si $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

méthode 1 :

→ calculer $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ u_{n+1} - u_n < 0 & u_{n+1} - u_n > 0 \end{array}$$

$\downarrow$
 (u_n) décroissante

$\downarrow$
 (u_n) croissante.

méthode 2 :

→ calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$



(u_n) décroissante

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$



(u_n) croissante.

méthode 3 :

$$\rightarrow u_n = n^2 + n = f(n)$$

$$\hookrightarrow f(x) = x^2 + x, \quad \underline{\underline{x > 0}}$$

→ si f est croissante, alors (u_n) est croissante

→ si f est décroissante, alors (u_n) est décroissante.

exercice :

$$t_n = 2 - \frac{1}{n+3}, \quad n \geq 0$$

① $t_{n+1} - t_n$

$$= 2 - \frac{1}{(n+1)+3} - \left(2 - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \cancel{2} - \frac{1}{n+4} - \cancel{2} + \frac{1}{n+3}$$

$$= -\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+3}$$

$$= \frac{-(n+3) + (n+4)}{(n+4)(n+3)}$$

$$= \frac{-\cancel{n} - 3 + \cancel{n} + 4}{(n+4)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{(n+4)}_{>0} \underbrace{(n+3)}_{>0}} > 0$$

② Donc la suite (t_n) est croissante.

exercice :

$$u_n = \frac{n}{2n+1}$$

$$\bullet u_{n+1} - u_n$$

$$= \frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1}$$

$$= \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{2n^2} + \cancel{n} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{2n^2} - \cancel{3n}}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$$

donc (u_n) est croissante.

exercice :

$$v_n = 4 - (n+1)^2$$

$$- v_{n+1} - v_n$$

$$= 4 - ((n+1)+1)^2 - (4 - (n+1)^2)$$

$$= 4 - (n+2)^2 - 4 + (n+1)^2$$

$$= 4 - (n^2 + 4n + 4) - 4 + (n^2 + 2n + 1)$$

$$= \cancel{4} - \cancel{n^2} - 4n - \cancel{4} - 4 + \cancel{n^2} + 2n + 1$$

$$= -2n - 3 < 0$$

donc (v_n) est décroissante.

exercice :

$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = v_n(1 - 2v_n) \end{cases}$$

$$\bullet v_{n+1} - v_n$$

$$= v_n(1 - 2v_n) - v_n$$

$$= \cancel{v_n} - 2v_n^2 - \cancel{v_n}$$

$$= \underbrace{-2}_{<0} \underbrace{v_n^2}_{>0} < 0$$

donc (v_n) est décroissante.

Exercice 3 *

Déterminer le sens de variation de chacune des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. Pour tout entier naturel n , $u_n = 0,2n^2 + n - 3$
2. Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3}{n+1}$
3. Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{n}{n+1}$
4. $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - 2n - 5$
5. $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + n^2$

4) $u_{n+1} - u_n$

$$= \cancel{u_n} - 2n - 5 - \cancel{u_n}$$

$$= -2n - 5 < 0$$

donc (u_n) est décroissante.

5) $u_{n+1} - u_n$

$$= \cancel{u_n} + n^2 - \cancel{u_n}$$

$$= n^2 > 0, \text{ donc } (u_n) \text{ croissante.}$$