

Topologie

exercice 7:

a) On suppose $(f_n)_n$ converge vers $f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$.

$$\hookrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

on pose $A = \{f_n : n \geq 0\}$

$$\hookrightarrow \underline{\text{but}} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow \forall n \geq 0, |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f converge vers f ,

il existe $N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$,
 $\|g_n - g\|_\infty < \varepsilon$, $\leq |g_n(x) - g(x)|$
 $< \varepsilon/3, \forall x \in E.$

$$\begin{aligned}
 \alpha |g_n(x) - g_n(y)| &= |g_n(x) - g(x) + g(x) \\
 &\quad - g(y) + g(y) - g_n(y)| \\
 &\leq |g_n(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| \\
 &\quad + |g(y) - g_n(y)|
 \end{aligned}$$

De plus, comme E est compact
 et g continue sur E , alors
 d'après le théorème de Heine,
 g est uniformément continue sur E .

Donc il existe $\delta^* > 0$ tel
 que $d(x, y) < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon/3$
 $\forall x, y \in E$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f(x)| \\
&\quad + |f(x) - f(y)| \\
&\quad + |f(y) - f_n(y)| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
&< \varepsilon, \quad \forall n \geq N.
\end{aligned}$$

• Par $n = 0, \dots, N-1$,

$f_0, \dots, f_{N-1}$ continue sur E ,
et donc comme E compact alors
par le théorème de Heine, elles
sont chacune uniformément continues.

Donc en posant $\delta_k > 0$,
 $\forall x, y \in E, d(x, y) < \delta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$

on pose $\delta = \min(\delta^*, \delta_0, \dots, \delta_{n-1})$

On a donc $\forall x, y \in E, \forall n \in \mathbb{N}$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$$

1) Donc $A = \{f_n : n \geq 0\}$ est équirécontinue.

2) On suppose A équirécontinue.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, d(x, y) < \delta \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall f \in A.$$

on pose $\mathcal{B} = \{x \in E : A(x) \text{ bornée dans } \mathbb{R}\}$.

• montrons que $\mathcal{B}$ est ouvert.

Soit $y \in D$.

On a $A(y)$ est bornée, il existe $\pi > 0$, $|f(y)| \leq \pi$, $\forall f \in A$.

Prenons $\varepsilon = 1$, par équicontinuité de A , il existe $\delta_1 > 0$ tel que :

$$d(x, y) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1, \forall f \in A$$

Donc si $d(x, y) < \delta_1$: $x \in B(y, \delta_1)$

$$|f(x)| = |f(x) - f(y) + f(y)|$$

$$\leq |f(x) - f(y)| + |f(y)|$$

$$\leq 1 + \pi < +\infty, \forall f \in A$$

donc $A(x)$ est bornée, et donc $x \in D$.

Donc $\exists \delta_1 > 0$, $\mathcal{B}(y, \delta_1) \subset \mathcal{B}$.
et $\mathcal{B}$ est ouverte.

• Montrons que $\mathcal{B}$ est fermée.

Soit (x_n) une suite d'éléments
de $\mathcal{B}$ telle que $x_n \rightarrow x \in E$.

Montrons que $x \in \mathcal{B}$, i.e
 $A(x)$ est bornée, i.e $\forall f \in A$,
 $|f(x)| \leq 1$.

Par équicontinuité, en prenant
 $\varepsilon = 1$, il existe $\delta_1 > 0$ tel
que :

$$d(a, b) < \delta_1 \Rightarrow |f(a) - f(b)| < 1, \\ \forall f \in A.$$

or comme $x_n \rightarrow x$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x) < \delta_j$.

or $x_n \in \mathcal{B}$, donc $A(x_n)$ est bornée, et il existe $\eta > 0$ tel que, $|f(x_n)| \leq \eta$, $\forall f \in A$.

Donc $\forall f \in A$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_n) + f(x_n)| \\ &\leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n)| \\ &\leq 1 + \eta < +\infty \end{aligned}$$

donc $A(x)$ est bornée, et donc $x \in \mathcal{B}$.

Donc $\mathcal{B}$ est un fermé de E .

Donc l'ensemble des $x \in E$,
A est à variation bornée est
une partie ouverte et fermée de E .