

Réurrence

• Encadrement

Exercice 5

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

Montrer par récurrence que (u_n) est bornée par $\frac{1}{2}$ et 5.

On pose la propriété

$$P(n): \frac{1}{2} \leq u_n \leq 5, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Initialisation: $n = 0$

D'une part, $u_0 = 5$

① d'autre part, $\frac{1}{2} \leq S \leq 5$.

donc la propriété est vraie
au rang $n = 0$.

Hérédité: Supposons que pour
un entier $n > 0$, $P(n)$ soit
vérifiée.

On a alors:

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 5 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} \times u_n \geq -\frac{1}{2} \times 5$$

$$-\frac{1}{4} \geq -\frac{1}{2} u_n \geq -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{1}{4} + 3 \geq -\frac{1}{2} u_n + 3 \geq -\frac{5}{2} + 3$$

(2)

$$\frac{11}{4} >$$

u_{n+1}

$$> \frac{1}{2}$$

✓

$$5 > 2,75$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 2,75 \leq 5 \quad \textcircled{3}$$

On a donc prouvé que la propriété $P(n)$ est initialisée au rang 0 et est héréditaire.

Conclusion :

• Avec une fonction.

Exercice 11

Un exercice de bac parfois subtil!

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x$ sur l'intervalle $[-\frac{1}{3}; 0]$.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$, et par $u_0 = -\frac{1}{6}$.

1. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\frac{1}{3}; 0]$. $= u_n^2 + \frac{2}{3}u_n$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 > u_n > -\frac{1}{3}$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit l la limite de (u_n) .

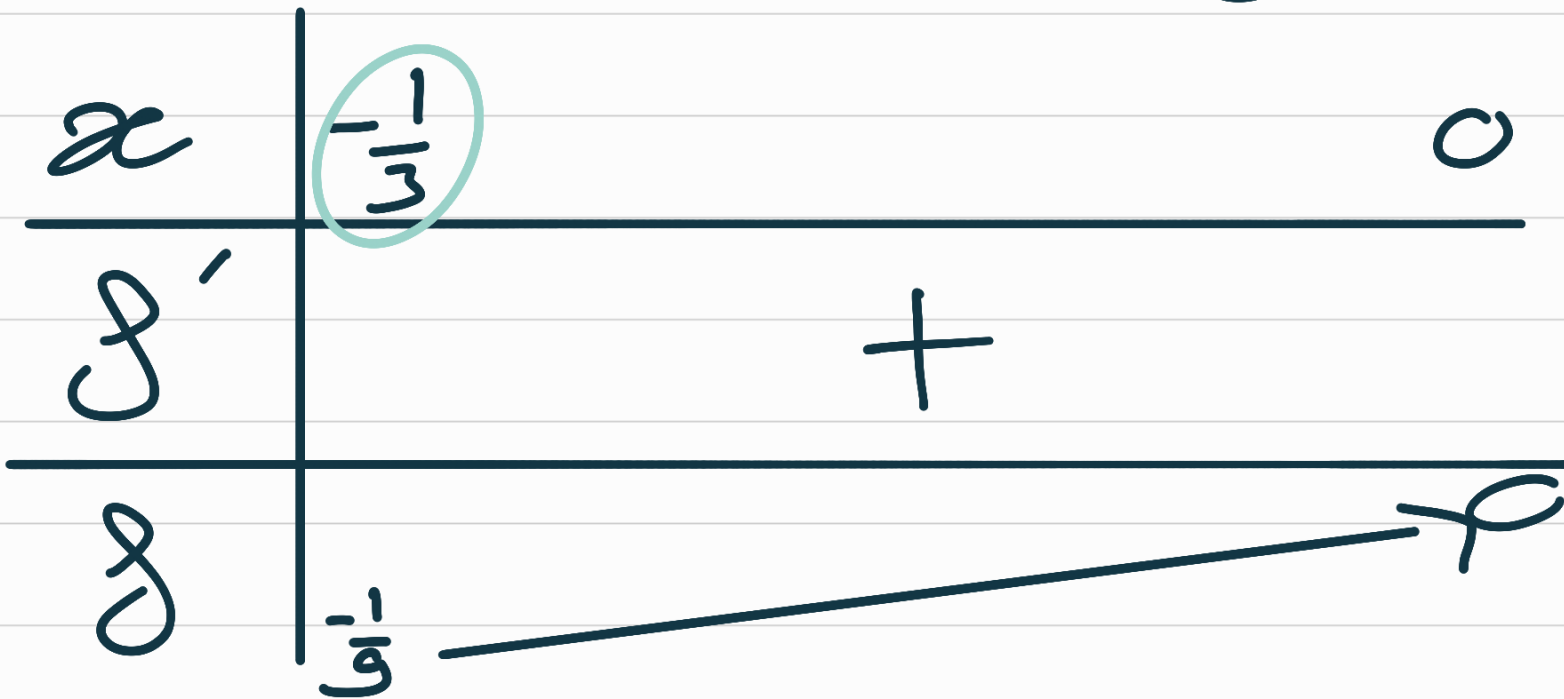
Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, montrer que $l = 0$ ou $l = \frac{1}{3}$.

6. En déduire finalement la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

1) $f'(x) = 2x + \frac{2}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	$+$

$$2x + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$



2) Montrer par récurrence :

$$-\frac{1}{3} < u_n < u_{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Soit $P(n)$ la propriété définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$P(n) : "-\frac{1}{3} < u_n \leq u_{n+1} < 0".$$

Initialisation : Montrons que la propriété $P(n)$ est initialisée au rang $n=0$.

$$\text{D'une part, } u_0 = -\frac{1}{6}$$

$$\text{et } u_1 = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$$

D'autre part, $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{6} < -\frac{1}{12} < 0$

et $-\frac{1}{3} < u_0 < u_1 < 0$.

donc $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité: Supposons que pour un entier $n > 0$, $P(n)$ est vérifiée.

On a alors :

$$-\frac{1}{3} < u_n < u_{n+1} < 0 \quad (1)$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et f est strictement croissante sur $[-\frac{1}{3}; 0]$ (2)

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(c)$$

$$-\frac{1}{3} < u_{n+1} < u_{n+2} < 0$$

$$-\frac{1}{3} < -\frac{1}{3} < u_{n+1} < u_{n+2} < 0$$

on a donc prouvé que la propriété $P(n)$ est initialisée au rang 0, et est héréditaire.

Exercice 1 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + 4n + 6$.
Montrer par récurrence que $u_n = 2n^2 + 4n + 7$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$

D'une part, $u_0 = 7$

D'autre part, $2 \times 0^2 + 4 \times 0 + 7 = 7$

donc $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité :

$$\bullet u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{\text{H.R.}} + 4n + 6. \quad (1)$$

$$= \underbrace{2n^2 + 4n + 7}_{\text{H.R.}} + 4n + 6 \quad (2)$$

$$= 2n^2 + 8n + 13.$$

$$\bullet 2(n+1)^2 + 4(n+1) + 7$$

$$= 2(n^2 + 2n + 1) + 4n + 4 + 7$$

$$= 2n^2 + 4n + 2 + 4n + 4 + 7$$

$$= 2n^2 + 8n + 13$$

done $u_{n+1} = 2(n+1)^2 + 4(n+1) + 7$

