

Dérivation

Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de la fonction dérivée :

⑦ $f : x \mapsto (4x - 2)^7$

⑧ $g : x \mapsto \frac{1}{5 - 3x}$

$$[(ax + b)^n]' = n \times a \times (ax + b)^{n-1}$$

a) $f'(x) = 7 \times 4 \times (4x - 2)^6$
 $= 28 (4x - 2)^6.$

$$\left(\frac{1}{ax + b} \right)' = - \frac{a}{(ax + b)^2}$$

b) $g'(x) = \frac{3}{(5 - 3x)^2}$

E.4 Déterminer l'expression, sous la forme d'un quotient simplifié, de la fonction f' (resp. g') dérivée de la fonction f (resp. g):

Ⓐ $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x - 2}$

Ⓑ $g(x) = \sqrt{3x - 1}$

$$(\sqrt{ax+b})' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}.$$

a) $f'(x) = \frac{1/3}{2\sqrt{\frac{1}{3}x - 2}} = \frac{1}{6\sqrt{\frac{1}{3}x - 2}}$

b) $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 1}}$

E.5) Soit f la fonction définie par la relation :

$$f: x \mapsto (x+5)\sqrt{1-2x}$$

- ① Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- ② Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f .
- ③ Dresser le tableau de signes de f' .
- ④ En déduire le tableau de variations de la fonction f .
- ⑤ Justifier que f admet un extrémum global en $-\frac{4}{3}$.

$$1) \bullet 1 - 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \mathcal{D}_f =]-\infty; \frac{1}{2}].$$

$$\triangle \mathcal{D}_{f'} =]-\infty; \frac{1}{2}[$$

$$2) f(x) = (x+5) \sqrt{1-2x}$$

$$u(x) = x+5$$

$$u'(x) = 1$$

$$v(x) = \sqrt{1-2x}$$

$$v'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} \\ = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{1-2x} + (x+5) \times \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$= \sqrt{1-2x} - \frac{x+5}{\sqrt{1-2x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-2x} \times \sqrt{1-2x} - (x+5)}{\sqrt{1-2x}}$$

$$= \frac{1-2x - x - 5}{\sqrt{1-2x}} = \frac{-3x-4}{\sqrt{1-2x}}$$

$$3) f'(x) = \frac{-3x-4}{\sqrt{1-2x}}$$

$$\bullet \sqrt{1-2x} > 0$$

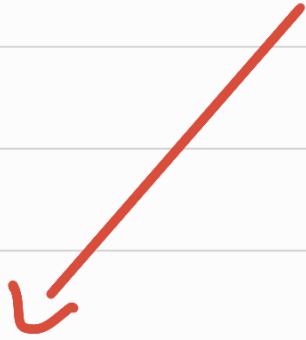
$$\bullet -3x-4 > 0$$

$$\Leftrightarrow -3x > 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
signe f'	+	0	-

$$ax + b$$



$$a > 0$$



$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
sign	-	$\emptyset$	+

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
sign	+	$\emptyset$	-

4)

x	$-\infty$	$-4/3$	$+\infty$
g'	+	$\emptyset$	-
g		13,44	0

5) D'après le tableau de variations, f admet un maximum global en $-\frac{4}{3}$.

E.7) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$f(x) = (3x^2 - 5x) \cdot \sqrt{x}$$

- ① Établir que la fonction f' , dérivée de la fonction f , admet pour expression:

$$f'(x) = \frac{15x \cdot (x - 1)}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

- ② Dans le repère $(O; I; J)$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

- ③ Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} 1) \quad f'(x) &= (6x - 5) \sqrt{x} + (3x^2 - 5x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{(6x - 5) \sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 3x^2 - 5x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{(6x - 5) \times 2x + 3x^2 - 5x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{12x^2 - 10x + 3x^2 - 5x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$= \frac{15x^2 - 15x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{15x(x-1)}{2\sqrt{x}} .$$

2) $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$y = 0 \times (x-1) + (-2)$$

done

$$\boxed{y = -2}$$

3) $f'(x) = \frac{15x(x-1)}{2\sqrt{x}} > 0$

$$15x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{0}{15} = 0$$

$$x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	0	1	∞
$15x$		+	
$x-1$	-	0	+
f'		0	+
f	0		

-2