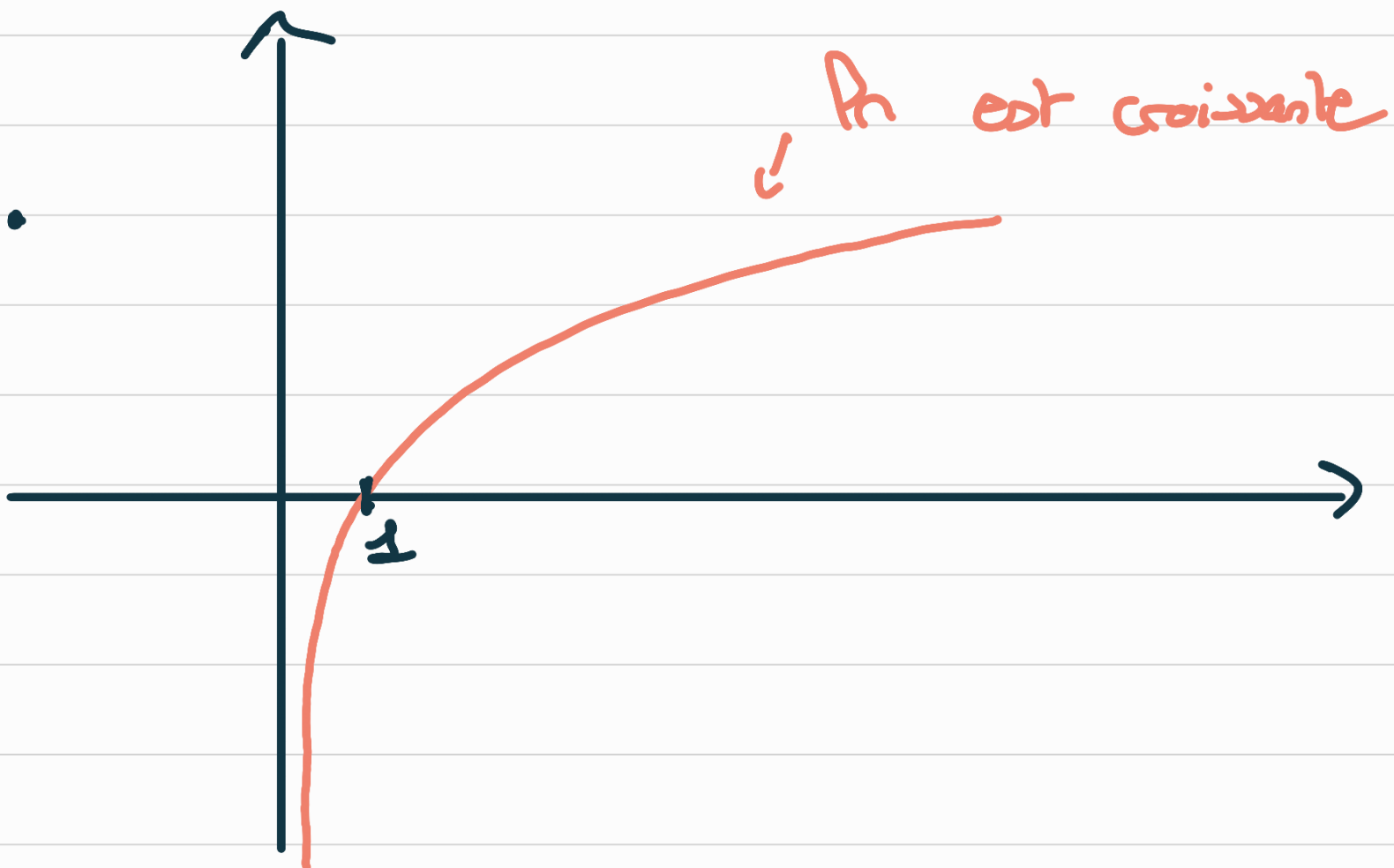


Logarithme

• $\ln(e^x) = x = e^{\ln(x)}, x > 0$

↳ $\ln$ est la fonction
"miroir" de $\exp$.

• La fonction $\ln$ est définie
sur $]0; +\infty[$.



$$\cdot P_n(1) = 0.$$

$$\cdot P_n(e) = 1$$

$$\cdot P_n(a \times b) = P_n(a) + P_n(b)$$

$$\hookrightarrow e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$\cdot P_n\left(\frac{a}{b}\right) = P_n(a) - P_n(b)$$

$$\hookrightarrow e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$\cdot P_n(a^n) = n P_n(a)$$

$$\cdot P_n\left(\frac{1}{a^n}\right) = -n P_n(a)$$

$$\cdot P_n(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} P_n(a).$$

$$\bullet \ln(x)' = \frac{1}{x}$$

$$\bullet \ln(u)' = \frac{u'}{u}$$

$$\bullet \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\bullet \ln(x) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \ln(y) \Leftrightarrow x \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} y$$

$\bullet \ln$ est concave sur $]0; +\infty[$.

$$\bullet e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y), y > 0$$

$$\bullet \ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y, x > 0$$

Type DAC

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n \ln(u_n) \end{cases}$$

1) Initialisation :

D'une part, $u_0 = \frac{1}{2}$ et

$$u_1 = \frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,60$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1.$$

Donc la proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité:

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 \quad \text{H.R.}$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$, et f est
strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
↳ justification

D'où :

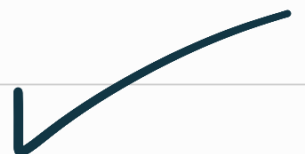
$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1).$$

↳ applique f

$$0,60 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

et :

$$\frac{1}{2} \leq 0,6 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1.$$



$$3) \quad f(P) = P$$

or d'après la partie D,
on a vu que P unique solution
et $P = \pm 1$.

Devor 2024

exercice 1:

$$\begin{aligned} 1) \quad a &= P_n(9) + P_n\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + P_n\left(\frac{1}{9}\right) \\ &= P_n(3^2) + P_n(\sqrt{3}) - P_n(3) \\ &\quad + P_n\left(\frac{1}{3^2}\right) \\ &= \cancel{2P_n(3)} + \frac{1}{2}P_n(3) - P_n(3) \\ &\quad - \cancel{2P_n(3)} \\ &= -\frac{1}{2}P_n(3) \end{aligned}$$

$$2) \quad y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\cdot f'(x) = 2x - 4 + 3 \times \frac{2}{2x-1}$$

$$\hookrightarrow f'(1) = 2 - 4 + \frac{6}{1} = 4$$

$$\cdot f(1) = 1 - 4 + \underset{=0}{3 \ln(1)} = -3$$

$$\text{done} \quad y = 4(x-1) - 3$$

$$= 4x - 4 - 3$$

$$= 4x - 7$$

$$3) P_n(x+3) < 2P_n(x+1)$$

$$\Rightarrow P_n(x+3) < P_n((x+1)^2)$$

$$\Leftrightarrow x+3 < (x+1)^2$$

$$\Rightarrow x+3 < x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow 0 < x^2 + 2x + 1 - x - 3$$

$$\Rightarrow 0 < x^2 + x - 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times -2$$

$$= 9 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

done $S =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$



$$x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

$$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$



Done $S =]1; +\infty[$

$$4) f(x) = 4 \ln(3x)$$

$$\hookrightarrow f(2x) = 4 \ln(3 \times 2x)$$

$$= 4 \ln(2 \times 3x)$$

$$= 4 [\ln(2) + \ln(3x)]$$

$$= 4 \ln(2) + 4 \ln(3x)$$

$$= \ln(2^4) + f(x)$$

$$= \ln(16) + f(x)$$

$$5) P_n(x) + P_n(x-10) = P_n(3) + P_n(7)$$

$$P_n(x(x-10)) = P_n(3 \times 7)$$

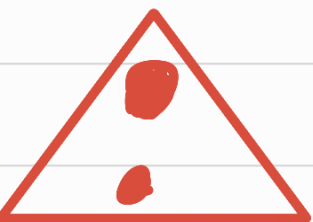
$$x(x-10) = 21$$

$$x^2 - 10x - 21 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 184 > 0$$

$$x_1 = \frac{10 - 2\sqrt{46}}{2} \approx -1,8$$

$$x_2 = \frac{10 + 2\sqrt{46}}{2} \approx 11,8 \checkmark$$



$$\bullet x > 0$$



$$\bullet x - 10 > 0 \implies x > 10$$