

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacune des formes indéterminées suivantes :

a. $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. $u_n = \frac{n+1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. $u_n = \frac{n^2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d. $u_n = \frac{n+1}{n^2-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. $u_n = \frac{(n+1)^2}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

f. $u_n = \frac{(n+1)^2}{2n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$

$$= \frac{\cancel{n} \times 1}{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Donc par quotient de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$

b) $u_n = \frac{n+1}{n}$

$$= \frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}}$$

$$= 1 + \frac{1}{n}.$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

$$c) \quad u_n = \frac{n^2}{n+1}.$$

$$= \frac{\cancel{n^2}^{\pm 2} \times 1}{\cancel{n}(1 + \frac{1}{n})}$$

$$= \textcircled{n} \times \boxed{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}}$$

$$\text{or } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1}, \text{ et } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty}$$

donc par produit de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$d) u_n = \frac{n+1}{n^2-1}.$$

$$= \frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$\alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$$

donc par quotient de limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc par produit de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 0.$$

! Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$

e) $u_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{n}$$

$$= \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n}$$

$$= n \times \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = \boxed{1}.$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \boxed{+\infty}.$$

donc par produit de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$

g)

$$u_n = \frac{(n+1)^2}{2n^2+1}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2 + 1}$$

$$= \frac{\cancel{n^2} \left(1 + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right)}{\cancel{n^2} \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \overset{1}{1} + \overset{0}{\frac{2}{n}} + \overset{0}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \overset{2}{2} + \overset{0}{\frac{1}{n^2}} = 2$$

donc par quotient de limites :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$.

g) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\infty + \infty - \infty$

F.I

$$= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$(a-b)(a+b)$
 $= a^2 - b^2$

$$= \frac{(\cancel{\sqrt{n+1}})^2 - (\cancel{\sqrt{n}})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\cancel{n} + 1 - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

donc par somme de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt{n+1}}_{+\infty} + \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty} = +\infty$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacune des cas suivants (avec ou sans forme indéterminée) :

a. $u_n = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ✓

b. $u_n = \frac{-2n^2 + 3}{5 - n}$ pour tout entier $n \geq 6$.

c. $u_n = 3n^2 - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ✓

d. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e. $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$ pour tout entier $n \geq 2$. ✓

f. $u_n = -9n - \frac{4}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g. $u_n = \frac{2n^2 - 1}{4n^2 + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

h. $u_n = 1 - \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i. $u_n = n + \frac{n+1}{n^2 - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

j. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

② 1. Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacune des cas suivants :

a. $u_n = 150 \times (0,9)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $u_n = -0,5 \times 1,2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. $u_n = 1 - 5^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. $u_n = 0,2 + 0,2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. $u_n = 2 + \frac{1}{n} - 3e^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

f. $u_n = 2 - \frac{1}{e^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g. $u_n = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

h. $u_n = -5 \times 7^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i. $u_n = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

j. $u_n = \frac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a. Soit la suite géométrique (b_n) de premier terme $b_0 = 2$ et de raison $0,1$. Déterminer la limite de (b_n) .

b. Déterminer la limite de la suite géométrique (c_n) de premier terme $c_0 = -2$ et de raison $1,2$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \end{cases}$$

a) $u_n = 150 \times (0,9)^n$

$\propto \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, car $-1 < 0,9 < 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) $u_n = -0,5 \times \underbrace{(1,2)^n}_{+\infty}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1,2)^n = +\infty$, car $1,2 > 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

c) $u_n = \overbrace{1 - 5^n}^{1 - (+\infty)}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$, car $5 > 1$.

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

e) $u_n = 2 + \frac{1}{n} - 3e^n.$
 $2 + 0 + (-\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -3e^n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$

$$f) \quad u_n = 2 - \frac{1}{e^n}.$$

$2 + 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^n} \right) = 0$$

$\hookrightarrow -\frac{1}{+\infty}$

done $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2.$

$$g) \quad u_n = 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

$1 + \underbrace{\quad}_0$

or $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, car $-1 < \frac{2}{3} < 1$

done $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$

b) $u_n = -5 \times 7^n.$
 $-5 \times +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n = +\infty \quad \text{car } 7 > 1$$

done $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$