

Exercice 4 (5 points)

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.
La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n$$

- 1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
- 2. On note h la fonction définie sur $[0; 20]$ par $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$.
On admet que h est croissante sur $[0; 20]$.
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
 - c. Justifier que $L = 15$.
- 3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.
 - a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
 - b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
1 def seui():
2     n = 0
3     u = 1
4     while ..... :
5         n = .....
6         u = .....
7     return n
```

1) $u_1 = -0,02u_0^2 + 1,3u_0$

$$= -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1$$
$$= 1,28.$$

donc la superficie que devrait recouvrir la piscine au premier juillet 2025 est de 1,28 ha.

2) a) Soit $P(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$P(n): "1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20"$$

Montrons que la propriété $P(n)$ est initialisée au rang $n=0$.

Comme pour $n=0$, on a :

$$\text{d'une part : } u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 1,28$$

$$\text{et d'autre part : } 1 \leq 1 \leq 1,28 \leq 20$$

donc $P(0)$ est vérifiée.

Montrons que la propriété $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0:

Supposons que pour un entier $n \geq 0$, $P(n)$ soit vérifiée.

On a alors :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$$

or $u_{n+1} = h(u_n)$, $\forall n \geq 0$, et h est croissante sur $[0; 20]$.

D'où :

$$h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20)$$

$$1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18$$

$$1 \leq 1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18 \leq 20$$

donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20$.

On a donc prouvé que la propriété $P(n)$ est initialisée au rang 0, et est héréditaire.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit que :

pour tout $n > 0$, $P(n)$ est vérifiée.

C'est-à-dire :

Pour tout $n > 0$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

b) on a montré que la suite (u_n) est croissante et majorée par 20, donc (u_n) converge.

c) Comme $u_{n+1} = h(u_n)$, et que h est continue, alors L vérifie l'équation :

$$h(x) = x$$

$$-0,02x^2 + 1,3x = x$$

$$-0,02x^2 + 1,3x - x = 0$$

$$-0,02x^2 + 0,3x = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0,09 > 0$$

$$x_1 = \frac{-0,3 - 0,3}{2 \times -0,02} = 15$$

$$x_2 = \frac{-0,3 + 0,3}{2 \times -0,02} = 0.$$

$$\alpha \quad u_n > 1 > 0, \quad \forall n \geq 0.$$

donc $L = 15$.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
1 def seuil():  
2     n = 0  
3     u = 1  
4     while u < 14:  
5         n = n + 1  
6         u = 0.2 * u + 1.3u  
7     return n
```

3) a) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 15$,

alors d'après ce modèle, cela se produira.

Limites

exercice 3:

a) $u_n = n^2 + n - 5$
 $\quad \quad \quad +\infty + \infty - 5$

. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

donc par somme de limites:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

• Limites usuelles:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\frac{1}{\pm \infty} = 0$$



$$\frac{1}{0} = \pm \infty$$

• Somme :

Dim un n-1	$+\infty$	$-\infty$	L	L	L
Dim un n-1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	L'
Dim un n-1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	L+L'



$+\infty - \infty$

F.I

• Produit :

Dim un $n \rightarrow +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$L > 0$ $L < 0$
Dim un $n \rightarrow -\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Dim un $n \rightarrow +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ $-\infty$

$L > 0$ $L < 0$	L
$-\infty$	L'
$-\infty$ $+\infty$	$L \times L'$



$\bigcirc x \pm \infty$

F.I

• Quotient :

lim $\frac{u}{v}$ $x \rightarrow a$	L	$L \neq 0$ $\rightarrow L > 0$ $\rightarrow L < 0$	L	$+\infty$	$-\infty$
lim $\frac{u}{v}$ $x \rightarrow +\infty$	$L' \neq 0$	0	∞	L $\rightarrow L > 0$ $\rightarrow L < 0$	L $\rightarrow L > 0$ $\rightarrow L < 0$
lim $\frac{u}{v}$ $x \rightarrow +\infty$	$\frac{L}{L'}$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$



$$\frac{0}{0}$$

et

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

F.I

exercice 3:

$$b) v_n = \underbrace{n^2 \sqrt{n}}_{+\infty \times +\infty} + \underbrace{2}_{+2}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sqrt{n} = +\infty$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$

$$c) w_n = \frac{-1}{2n-5} \quad \left) \quad \begin{matrix} -1 \\ +\infty \end{matrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n-5 = +\infty$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$

exercice 4 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \pm & q = 1 \\ \text{N.L} & q \leq -1 \end{cases}$$

1) $u_n = \sqrt[1+0]{1 + \frac{1}{2^n}} \cdot \frac{1}{+\infty}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, car $2 > 1$

d'après $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

$$2) \quad u_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0, \text{ car } -1 < \frac{1}{3} < 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$3) \quad u_n = 7 + \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0, \quad -1 < -\frac{1}{4} < 1$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7.$$

$$4) u_n = 3 \times (-2)^n.$$

Comme $-2 \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite.

$$5) u_n = \overset{+\infty}{5^n} - \overset{+\infty}{4^n} \Rightarrow +\infty - \infty \text{ (!!)}$$

$$= 5^n \left(1 - \frac{4^n}{5^n} \right)$$

$$= \underbrace{5^n}_{+\infty} \times \underbrace{\left(1 - \left(\frac{4}{5} \right)^n \right)}_1$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$, car $5 > 1$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n = 0$, car $-1 < \frac{4}{5} < 1$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{4}{5} \right)^n = 1$.

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$$6) \quad u_n = \frac{\overbrace{3^n + 2}^{+\infty}}{\underbrace{8^n - 1}_{+\infty}} \Rightarrow \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indeterminate form)}$$

$$= \frac{3^n \left(1 + \frac{2}{3^n}\right)}{8^n \left(1 - \frac{1}{8^n}\right)}$$

$$= \left(\frac{3}{8}\right)^n \times \frac{1 + \frac{2}{3^n}}{1 - \frac{1}{8^n}}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3^n} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{8^n}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{3^n} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{8^n}$$

$$\text{donc par quotient, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{3^n}}{1 - \frac{1}{8^n}} = 1$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0, \text{ car } -1 < \frac{3}{8} < 1$$

Donc par produit de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 3 = +\infty$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$