

Suites

exercice :

$$\bullet u_n = \frac{n}{n+1} \quad \rightarrow \quad \frac{8}{8} \quad \textcircled{=1}$$

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \quad \textcolor{red}{1}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$$

$$u_n = \frac{n^2}{n+1} \quad \sim \frac{2/8}{2/2} \quad \textcircled{=}$$

$$= \frac{n^2}{n(1 + \frac{1}{n})}$$

$$= \frac{n}{1 + \frac{1}{n}} \quad \begin{matrix} \rightarrow +\infty \\ \rightarrow 1 \end{matrix}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

donc par quotient de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1 + \frac{1}{n}} = +\infty.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad u_n &= \frac{n+1}{n^2-1} \\
 &= \frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)} \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$$

donc par quotient de

Limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 1.$

Et par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$

$$\bullet \quad u_n = n + \cos(n)$$

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$\underbrace{-1 + n}_{+\infty} \leq n + \cos(n) \leq \underbrace{1 + n}_{+\infty}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + n = +\infty,$

donc par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\bullet \quad u_n = -n + \sin(n)$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$\underbrace{-n-1}_{-\infty} \leq -n + \sin(n) \leq \underbrace{1-n}_{-\infty}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1-n = -\infty,$

donc par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

$$\bullet \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n} + 2$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{n} + 2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2} \leq \frac{(-1)^n}{n} + 2 \leq \underbrace{\frac{1}{n} + 2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2}$$

donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$

Exercice 2 (5 points)

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier la réponse.

$$1) \quad u_1 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 25$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 22,5.$$

$$2) \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 20$$

$$= \frac{1}{2} u_n + 10 - 20$$

$$= \frac{1}{2} u_n - 10 = \frac{1}{2} \left(u_n - \frac{20}{1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (u_n - 20)$$

$$= \frac{1}{2} v_n.$$

donc (v_n) est géométrique
de raison $\frac{1}{2}$ et de premier
terme $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10$.

3)

$$\begin{cases} u_n = u_0 \times q^n \\ u_n = u_1 \times q^{n-1} \end{cases}$$

Comme (v_n) est géométrique
de raison $\frac{1}{2}$ et de premier
terme $v_0 = 10$, alors :

$$v_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$4) \quad v_n = u_n - 20$$

$$\Leftrightarrow u_n = v_n + 20$$

$$\text{donc} \quad u_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 20$$

$$5) \quad u_n = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{or} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0, \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20.$$

Exercice 3 : (6 points)

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x - 2}$.

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$

$$u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n) .

On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$.

Déterminer la valeur de ℓ .

4. On considère la fonction rang écrite ci-dessous en langage Python.

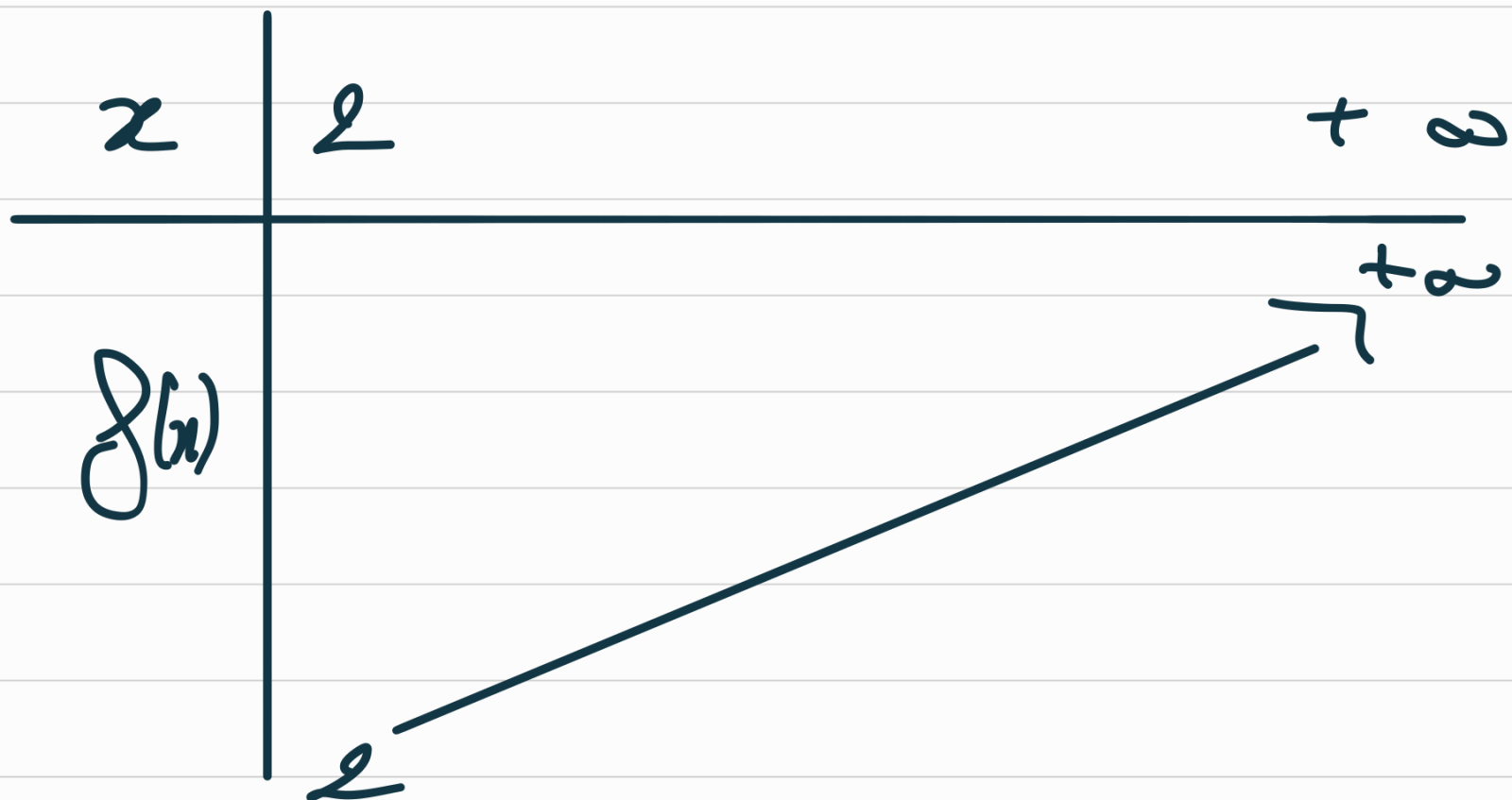
On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre x .

4. On considère la fonction rang écrite ci-dessous en langage Python.
On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre x .

```
1 from math import *
2
3 def rang(a):
4     u = 6
5     n = 0
6     while u >= a:
7         u = sqrt(3*u - 2)
8         n = n + 1
9     return n
```

- a. Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur ?
b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat ?

1) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} > 0$



2) a) Soit $P(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$P(n) : "2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6".$$

Montrons que la propriété $P(n)$ est initialisée au rang : $n = 0$

Comme pour $n = 0$ on a :

$$\text{d'une part : } u_0 = 6 \text{ et } u_1 = \sqrt{3 \times 6 - 2} = 4$$

$$\text{d'autre part : } 2 \leq 4 \leq 6 \leq 6.$$

donc $P(0)$ est vérifiée.

Montrons que la propriété $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0.

Supposons que pour un entier $n > 0$, $P(n)$ soit vérifiée.

On a alors :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n > 0$ et f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(6)$$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4 \leq 6$$

donc $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 6$.

On a donc prouvé que la

propriété $P(n)$ est initialisée au rang 0, et est héréditaire.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit que pour tout $n \geq 0$, $P(n)$ est vérifié.

Par $n \geq 0$, $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

b) on a démontré que la suite est décroissante et minorée par 2.

Donc la suite (u_n) converge.

c) $\sqrt{3x-2} = x$

$$3x-2 = x^2$$

$$0 = x^2 - 3x + 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

donc comme $\forall n > 0, 2 \leq u_n,$

alors $\ell = 2.$