

Réurrence

Exercice 6

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

On considère la propriété
 $P_n : u_n = 2^{n+1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$

D'une part, $u_0 = 3$

D'autre part, $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un certain rang n , c-à-d $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, c.à.d :

$$u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$$

Astuce : ① écrire la relation entre u_{n+1} et u_n

② appliquer l'hypothèse à u_n .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 1 \\ &= 2(2^{n+1} + 1) - 1 \\ &= 2 \times 2^{n+1} + 2 - 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie

au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est initialisée au rang $n=0$ et est héréditaire à partir de ce rang, donc par le principe de récurrence : $u_n = 2^{n+1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

Montrer par récurrence que (u_n) est bornée par $\frac{1}{2}$ et 5.

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 5.$$

On considère la propriété
 $P_n : \frac{1}{2} \leq u_n \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation: $n = 0$.

D'une part, $u_0 = 5$

D'autre part, $\frac{1}{2} \leq 5 \leq 5$

donc la propriété est vraie
au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un certain rang n , c-à-d $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 5$

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, c-à-d :

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 5$$

Astuce : ① écrire l'hypothèse sur u_n

② construire u_{n+1} grâce à la relation entre u_{n+1} et u_n .

↪ $u_{n+1} = \overset{\textcircled{1}}{-\frac{1}{2}u_n} + \overset{\textcircled{2}}{3}$

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} -\frac{1}{2} < 0$$

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} > -\frac{1}{2} \times u_n > -\frac{1}{2} \times 5$$

$$-\frac{1}{4} > -\frac{1}{2} u_n > -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{1}{4} + 3 > \underbrace{-\frac{1}{2} u_n + 3}_{u_{n+1}} > -\frac{5}{2} + 3$$

$$\frac{11}{4} > u_{n+1} > \frac{1}{2}$$

$$5 \geq 2,75$$

donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 2,75 \leq 5$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est initialisée au rang $n=0$ et est héréditaire à partir de ce rang, donc par le principe de récurrence : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bonus (1 point)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} = g(u_n)$$

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

On considère la propriété
 $P_n : "0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}"$.

Initialisation: $n=0$

D'une part, $u_0 = 1$ et

$$u_1 = \frac{5u_0 + 4}{u_0 + 2} = \frac{9}{3} = 3$$

D'autre part, $0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$

donc la propriété est vraie
au rang $n=0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un certain rang n , c-à-d $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, c-à-d :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$

Astuce : ① écrire l'hypothèse sur u_n

② appliquer la fonction de part et d'autre.

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

$$\text{or } u_{n+1} = f(u_n), \forall n \geq 0 \text{ et } f$$

est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$

et

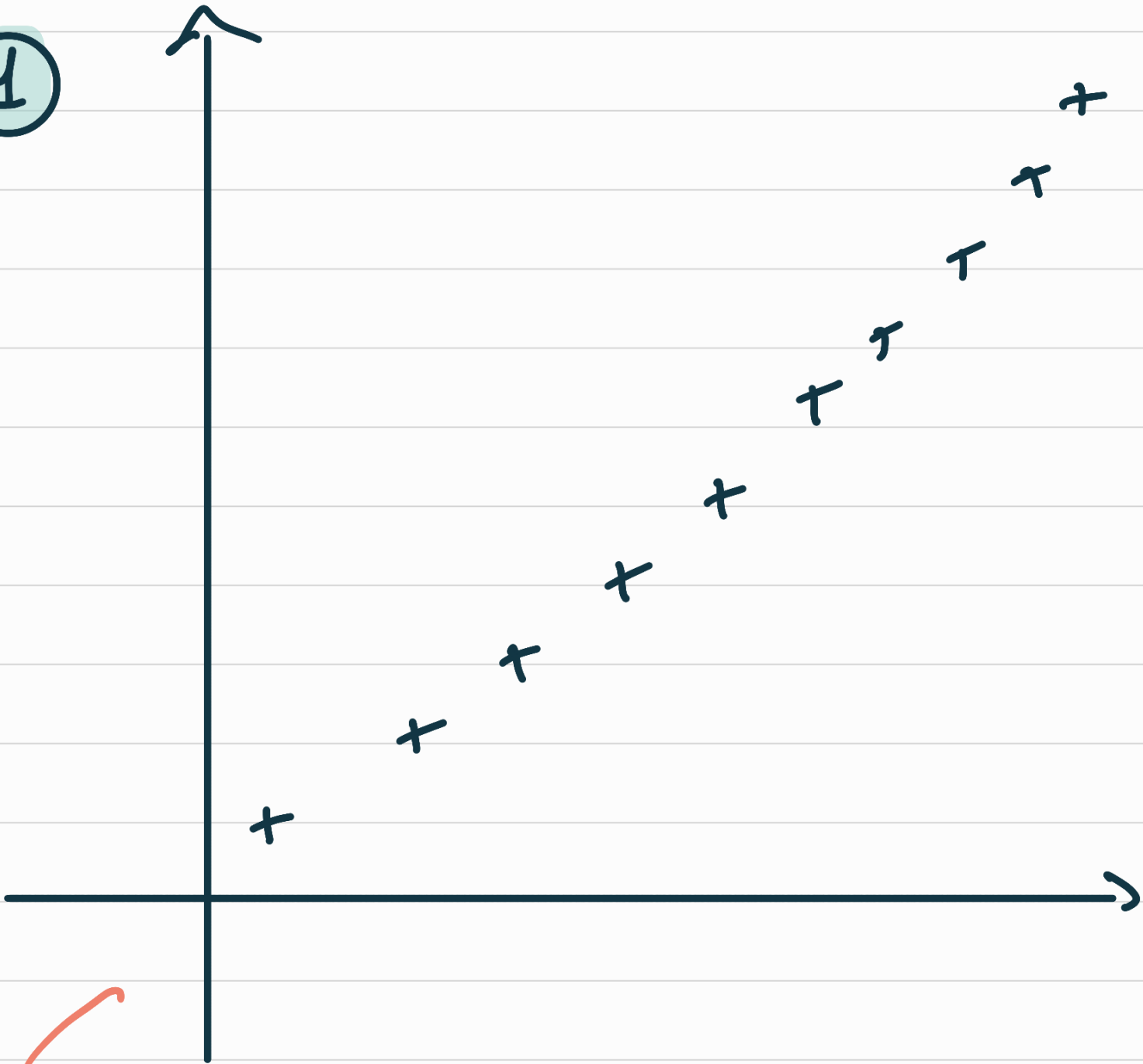
$$0 \leq 2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4.$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est initialisée au rang $n=0$ et est héréditaire à partir de ce rang, donc par le principe de récurrence : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Limites

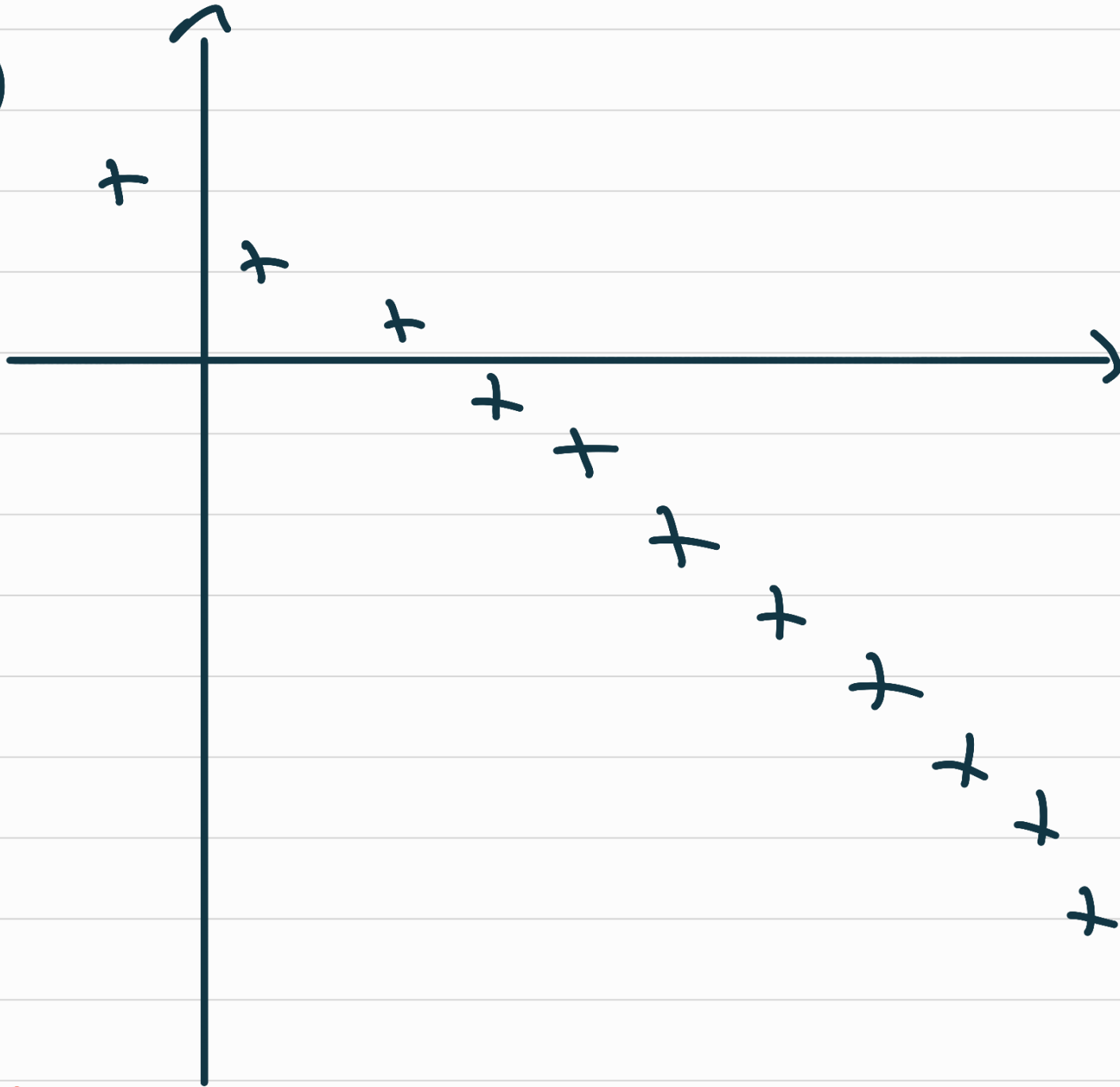
①



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Diverge

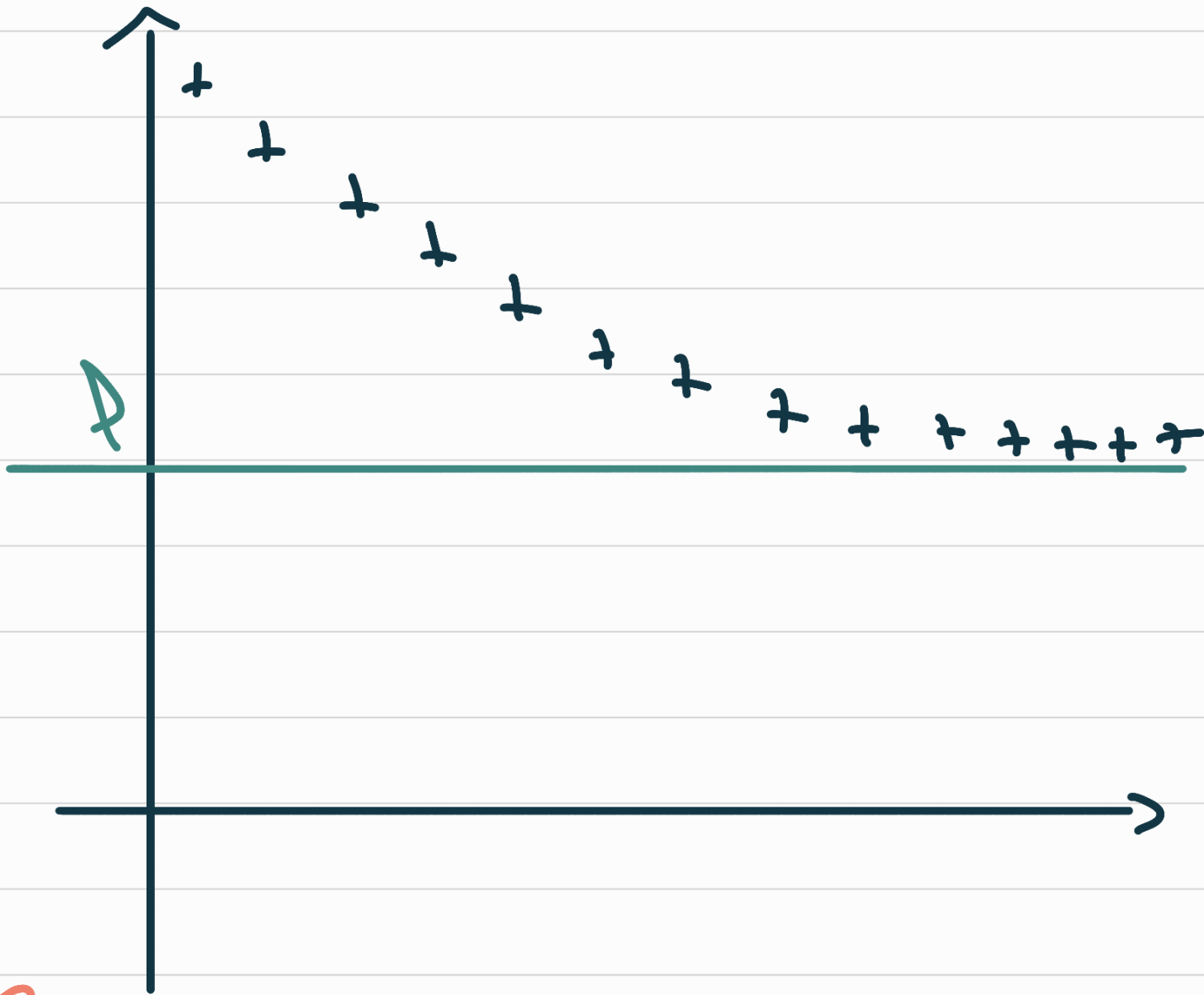
②



$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$$

1) diverge

3



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Converge

• Limites usuelles:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} = +\infty$$

↖ 1, 2, 10, ...

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$$

$$\frac{1}{\pm \infty} = 0$$



$$\frac{1}{0} = \pm \infty$$

• Somme :

Dim un n-1	$+\infty$	$-\infty$	L	L	L
Dim un n	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	L'
Dim un n+1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	L+L'



$+\infty - \infty$

F.I

• Quotient:

lim un	L	$L \neq 0$ $L > 0$ $L < 0$	L	$+\infty$	$-\infty$
lim un	$L' \neq 0$	0	∞	L $L > 0$ $L < 0$	L $L > 0$ $L < 0$
lim un	$\frac{L}{L'}$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$



$$\frac{0}{0}$$

et

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

F.I

• Produit :

Dim un n-1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$L > 0$ $L < 0$
Dim un n-1	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Dim un n-1	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ $-\infty$

$L > 0$ $L < 0$	L
$-\infty$	L'
$-\infty$ $+\infty$	$L \times L'$



$\bigcirc \times \pm \infty$

F.I