

Exercice 1 (6 points)

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A – Premier modèle

À partir d'un échantillon de données, on considère une première modélisation :

- chaque année, la probabilité que le phénomène El Niño soit dominant est égale à $0,4$;
- la survenue du phénomène El Niño se fait de façon indépendante d'une année sur l'autre.

On note X la variable aléatoire qui, sur une période de 10 ans, associe le nombre d'années où El Niño est dominant.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. a. Calculer la probabilité que, sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années.
b. Calculer $P(X \leq 2)$. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice ?
3. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

1) On répète 10 fois de façon indépendante et identique l'expérience de Bernoulli de paramètre $0,4$. 

Donc X suit une loi Binomiale $B(10; 0,4)$.

2) a)
$$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot 0,4^2 \cdot (1-0,4)^{10-2}$$
$$\approx 0,121$$

donc la probabilité que sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années est d'environ 0,121.

$$b) P(X \leq 2) \approx 0,167$$

donc la probabilité que sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant au plus 2 années est d'environ 0,167.

$$3) E[X] = 10 \times 0,4 = 4$$

En moyenne, sur une période de 10 ans, El Niño est dominant 4 années.

Partie B – Second modèle

Après une étude d'un recueil de données plus important sur les 50 dernières années, une autre modélisation apparaît plus pertinente :

- si le phénomène El Niño est dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit encore l'année suivante est 0,5
– par contre, si le phénomène El Niño n'est pas dominant une année, alors la probabilité qu'il soit dominant l'année suivante est 0,3.

On considère que l'année de référence est 2023.

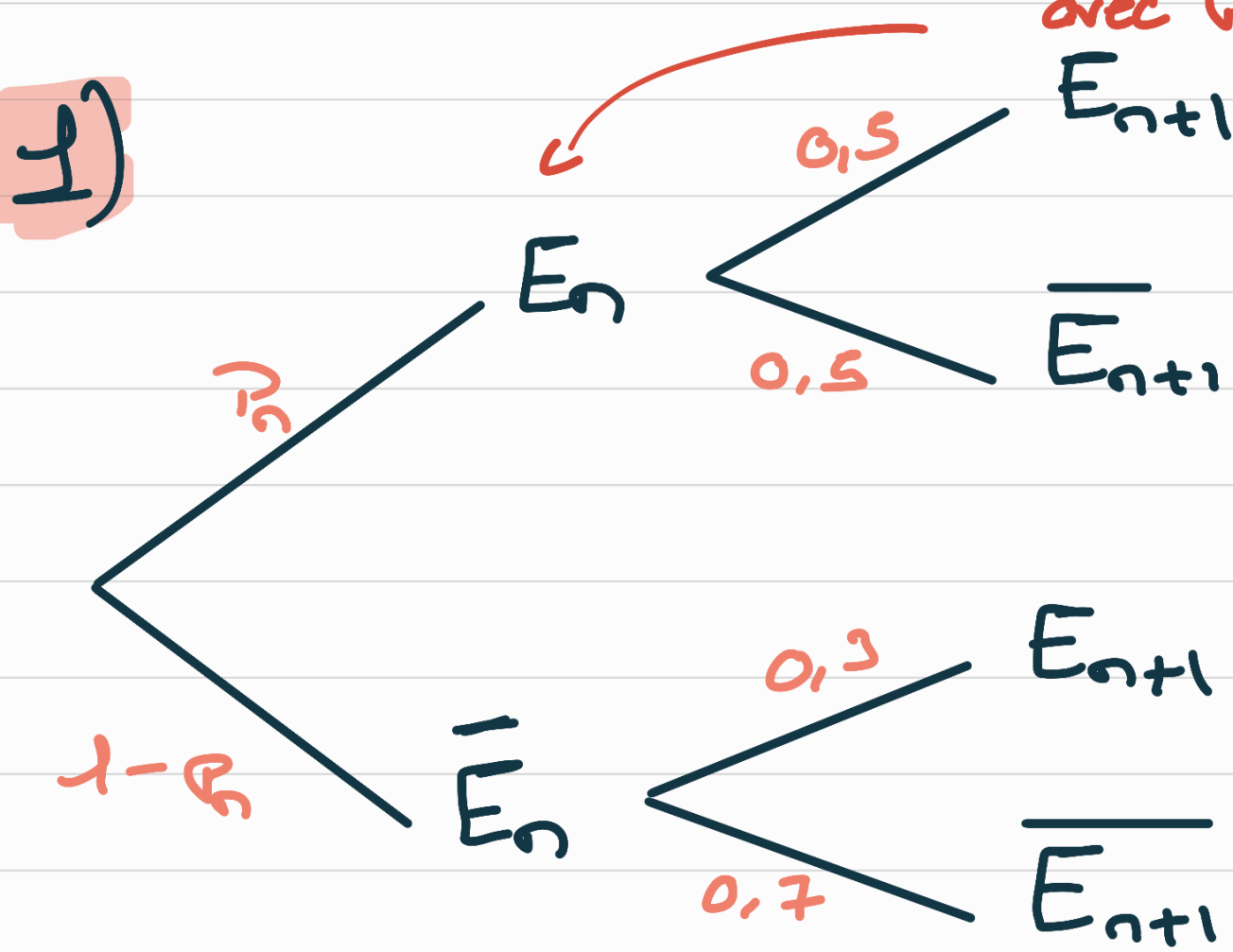
On note pour tout entier naturel n :

- E_n l'événement « le phénomène El Niño est dominant l'année 2023 + n » ;
- p_n la probabilité de l'événement E_n .

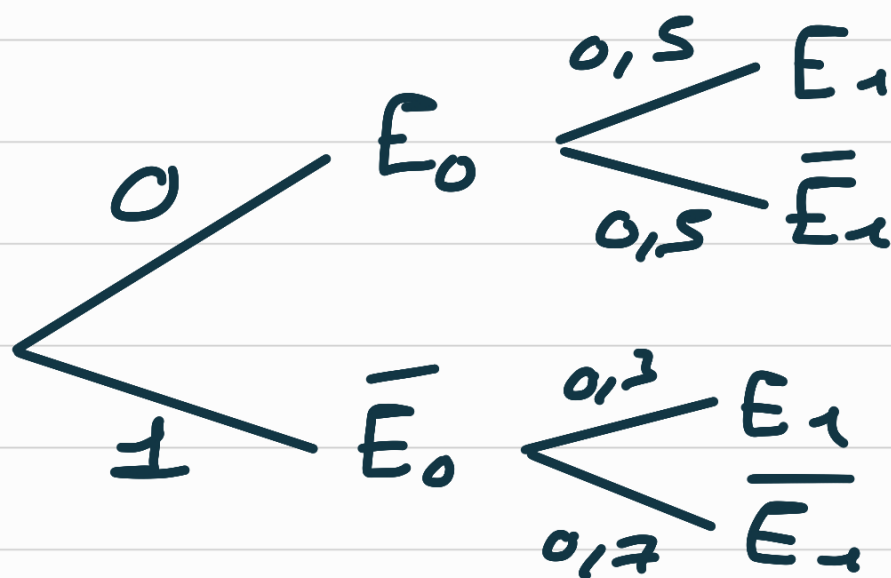
En 2023, El Niño n'était pas dominant. On a ainsi $p_0 = 0$.

1. Soit n un entier naturel. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :
2. Justifier que $p_1 = 0,3$.
3. En vous aidant de l'arbre, montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,3$] proba. Totale avec p_n



2)



D'après la formule des probabilités totales:

$$P_1 = P(E_1)$$

$$= P(E_0 \cap E_1) + P(\bar{E}_0 \cap E_1)$$

$$= \underbrace{P(E_0)}_{0} \times \underbrace{P(E_1|E_0)}_{0,5} + 1 \times 0,3$$

$$= 0,3$$

donc $P_1 = 0,3$

3) D'après la formule des probabilités totales:

$$P_{n+1} = P(E_{n+1})$$

$$= P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\bar{E}_n \cap E_{n+1})$$

$$= P_n \times 0,5 + (1 - P_n) \times 0,3$$

$$= 0,5P_n + 0,3 - 0,3P_n$$

$$= 0,2P_n + 0,3.$$

donc pour tout $n \geq 0$,

$$P_{n+1} = 0,2P_n + 0,3.$$

On cherche à prévoir l'évolution de l'apparition du phénomène El Niño.

4. a. Conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (p_n) .

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $p_n \leq \frac{3}{8}$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n) .

d. En déduire la convergence de la suite (p_n) .

On cherche à déterminer la limite de la suite (p_n) .

5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \frac{3}{8}$ pour tout entier naturel n .

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,2$ et préciser son premier terme.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $p_n = \frac{3}{8}(1 - 0,2^n)$.

c. Calculer la limite de la suite (p_n) .

d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4) a) On peut conjecturer que la suite est croissante et que sa limite est $0,375$.

b) $p_n \leq \frac{3}{8} \rightarrow \text{H.R}$

$0,2 p_n \leq 0,2 \times \frac{3}{8} \rightarrow \text{Lego}$

$$0,2 P_n \leq 0,075$$

$$0,2 P_n + 0,3 \leq 0,075 + 0,3$$

$$P_{n+1} \leq 0,375 = \frac{3}{8}.$$

$$c) P_{n+1} - P_n$$

$$= 0,2 P_n + 0,3 - P_n$$

$$= -0,8 P_n + 0,3$$

$$= -0,8 \left(P_n + \frac{0,3}{-0,8} \right)$$

$$= -0,8 (P_n - 0,375)$$

$$= \underbrace{-0,8}_{<0} \left(\underbrace{P_n - \frac{3}{8}}_{\leq 0} \right)$$

$$\text{or } P_n \leq \frac{3}{8} \Leftrightarrow P_n - \frac{3}{8} \leq 0$$

$$\text{donc } P_{n+1} - P_n > 0$$

et donc (P_n) est croissante.

d) (P_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{8}$, donc la suite est convergente.

$$\begin{aligned} \text{5) a) } u_{n+1} &= P_{n+1} - \frac{3}{8} \\ &= 0,2P_n + 0,3 - \frac{3}{8} \\ &= 0,2P_n - 0,075 \\ &= 0,2 \left(P_n - \frac{0,075}{0,2} \right) \end{aligned}$$

$$= 0,2 (P_n - 0,375)$$

$$= 0,2 (P_n - \frac{3}{8})$$

$$= 0,2 u_n.$$

donc (u_n) est géométrique de raison $0,2$ et de premier terme $u_0 = P_0 - \frac{3}{8} = 0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$.

$$\textcircled{3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n \\ = -\frac{3}{8} \times 0,2^n$$

or $u_n = P_n - \frac{3}{8}$, d'où on a :

$$P_n = u_n + \frac{3}{8}$$

$$P_n = -\frac{3}{8} \times 0,2 + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{3}{8} (1 - 0,2)$$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$, car $-1 < 0,2 < 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 0,2^n = 1$, et

par produit de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{3}{8}.$$

d) Sur le long terme, la probabilité que $\mathcal{E}$ wins soit dominant est de $\frac{3}{8}$.