

Limites de Suites

exercice :

a) $u_n = \underset{+\infty}{3n} - \underset{0}{\frac{2}{n}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \end{array} \right.$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$

b) $u_n = \underset{1 - \infty}{1 - 3n^2}$

$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n^2 = -\infty \end{array} \right.$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

$$c) u_n = \frac{1}{1+n} \quad \frac{1}{+\infty}$$

$$\hookrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1+n = +\infty$$

done $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

$$d) u_n = -10 + n - \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$$\hookrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$-10 + \infty - 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0$$

done $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$e) u_n = \frac{-2}{n^2 + n + 3} \quad \frac{-2}{+\infty}$$

$$(\text{, } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n + 3 = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

exercice :

$$\begin{matrix} & & \text{F.I} \\ & & +3 \\ +\infty & -\infty & \end{matrix}$$

$$a) u_n = n^2 - n + 3$$

$$= n^2 \left(1 - \frac{n}{n^2} + \frac{3}{n^2} \right)$$

$$= \overset{+\infty}{n^2} \left(\underset{\times 1}{1} - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \overset{1-0+0}{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = 1$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

donc par produit de limites
on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

b)
$$u_n = \frac{\overbrace{n^2 + \ln n + 1}^{+\infty}}{\underbrace{\ln^2 n + 1}_{+\infty}}$$

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
F.I

$$u_n = \frac{\cancel{n^2} \left(1 + \frac{\ln n}{\cancel{n^2}} + \frac{1}{\cancel{n^2}} \right)}{\cancel{n^2} \left(2 + \frac{1}{\cancel{n^2}} \right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}}$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n^2} = 2$.

donc par quotient de limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\cancel{n} + 1 - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad \frac{1}{+\infty}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad u_n &= \frac{-2n^2 + 3}{5 - n} \\
 &= \frac{n^2 \left(-2 + \frac{3}{n^2}\right)}{n \left(\frac{5}{n} - 1\right)}
 \end{aligned}$$

$$= n \times \frac{-2 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1}$$

$$\text{or} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + \frac{3}{n^2} = -2$$

$$\text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} - 1 = -1$$

donc par quotient de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

clonc par produit de limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{-2 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1} = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

exercice :

$$\bullet u_n = \cos(n) + 2n$$

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$-1 + 2n \leq \cos(n) + 2n \leq 1 + 2n$$

$$\underbrace{-1 + 2n}_{+\infty} \leq u_n \leq \underbrace{1 + 2n}_{+\infty}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + 2n = +\infty$$

donc par comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$u_n = \sin(n) - 2n$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$\underbrace{-1 - 2n}_{-\infty} \leq \sin(n) - 2n \leq \underbrace{1 - 2n}_{-\infty}$$

$$-1 - 2n \leq u_n \leq 1 - 2n$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 2n = -\infty$$

done par comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty.$$

$$\bullet \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n} + 2$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n} + 2 \leq \frac{(-1)^n}{n} + 2 \leq \frac{1}{n} + 2.$$

donc $-\frac{1}{n} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n} + 2.$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} + 2 = 2$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 2 = 2.$

donc par le théorème
des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$

Théorème :

- (u_n) croissante + majorée
 $u_n \leq M$

$\Rightarrow (u_n)$ converge

- (u_n) décroissante + minorée
 $u_n \geq m$

$\Rightarrow (u_n)$ converge

$\lim_{n \rightarrow +\infty}$

$q^n =$

$+\infty$

$q > 1$

0

$-1 < q < 1$

1

$q = 1$

∞

$q \leq -1$