

Fiche 5

exercice 1:

$$1) y^{(3)} + y'' + y' + y = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r^3 + r^2 + r + 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$(r+1)(r^2+1) = 0$$

$$(r+1)(r-i)(r+i) = 0$$

$$Z = \alpha + i\beta, \quad \alpha=0 \quad \beta=1$$

$$y_h(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + C_3 e^{-t}.$$

- si f est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme (voir [cet exercice](#)).
- si $f(x) = A \exp(\lambda x)$, on cherche une solution particulière sous la forme
 - $B \exp(\lambda x)$ si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique;
 - $Bx \exp(\lambda x)$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique;
 - $Bx^2 \exp(\lambda x)$ si λ est racine double de l'équation caractéristique.
- si $f(x) = B \cos(\omega x)$, on cherche une solution sous la forme $y(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$ sauf si l'équation homogène est $y'' + \omega^2 y = 0$. Dans ce cas, on cherche une solution sous la forme $y(x) = ax \sin(\omega x)$.
- si $f(x) = B \sin(\omega x)$, on cherche une solution sous la forme $y(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$ sauf si l'équation homogène est $y'' + \omega^2 y = 0$. Dans ce cas, on cherche une solution sous la forme $y(x) = ax \cos(\omega x)$.
- remarquons que le cas où le second membre est de la forme $\cos(\omega x)$ ou $\sin(\omega x)$ peut aussi être traité en utilisant $\cos(\omega x) = \Re(e^{i\omega x})$, en procédant comme décrit ci-dessous pour $e^{\lambda x}$ avec $\lambda = i\omega$, et en prenant la partie réelle de la solution particulière trouvée. Cette méthode fonctionne aussi si le second membre est de la forme $e^{ax} \cos(bx)$ (voir [cet exercice](#)).
- Plus généralement, si $f(x) = P(x) \exp(\lambda x)$, avec P un polynôme, on cherche une solution sous la forme $Q(x) \exp(\lambda x)$ (voir [cet exercice](#)).

$$\bullet z_1(t) = t^4$$

$$\hookrightarrow \text{pose } y(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

$$\bullet y'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct + d$$

$$y''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$$

$$y^{(3)}(t) = 24at + 6b.$$

$$y^3 + y'' + y' + y$$

$$= at^4 + (b+4a)t^3 + (c+3b+12a)t^2 + (d+2c+6b+24a)t + (e+d+2c+6b)$$

$$\cdot y^3 + y'' + y' + y = t^4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+4a=0 \\ c+3b+12a=0 \\ d+2c+6b+24a=0 \\ e+d+2c+6b=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = t^4 - 4t^3 + 24$$

- $y^3 + y'' + y' + y = e^{-t}$.

↳ $y_p(t) = C t e^{-t}$

- $y^3 + y'' + y' + y = e^t$

↳ $y_p(t) = C e^t$

- $y^3 + y'' + y' + y = \cos(t)$

↳ $y_p(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$.

- $y^{(3)} + y'' + y' + y = \underbrace{t^2}_{\text{deg } 2} \sin(t).$

↳ $y_h = C_3 e^{-t} + C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t).$

on pose:

$$y_p(t) = t \left(\overbrace{A(t)}^{a_1 t^2 + b_1 t + c_1} \cos(t) + \overbrace{B(t)}^{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} \sin(t) \right)$$

avec

$$\deg(A) = \deg(B) = 2$$

- $y^{(3)} + y'' + y' + y = \underbrace{t}_{\text{deg } 1} \cos(2t).$

↳ $y_p(t) = \overbrace{A(t)}^{at+b} \cos(2t) + \overbrace{B(t)}^{ct+d} \sin(2t)$

avec $\deg(A) = \deg(B) = 1$

- $b(t) = f_m(t) \cos(\omega t)$

ou $f_m(t) \sin(\omega t)$

on pose :

$$y_p(t) = t^s e^{\lambda t} (P_m \cos(\omega t) + Q_m \sin(\omega t))$$

avec P_m, Q_m de même degré que f_m .

et $\lambda \pm i\omega$ racine du polynôme caractéristique avec multiplicité s .

exercice 2:

$$\bullet b_4(t) = \cos(t) + \cos(2t)$$


$$b_{4,1}(t) = \cos(t)$$


$$b_{4,2}(t) = \cos(2t)$$


$$y_{p,1} + y_{p,2}$$
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{y_p}$$

$$y_p$$

- $y_g(t) = e^t \cos(t)$

$$\hookrightarrow y_{\text{gp}}(t) = e^t (A \cos(t) + B \sin(t))$$

$$\Rightarrow r^2 + 1 = 0, \quad r = \pm i$$

$$y_h(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t).$$

de multiplicité 2.
 Si $\alpha \pm i\beta$ racine $\checkmark$ du polynôme caractéristique et $y(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ou $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

$$\hookrightarrow y_{\text{gp}}(t) = e^s e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)).$$

$$\bullet \quad b_3(t) = \sin^2(t)$$

$$\hookrightarrow \sin^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t).$$