

Au 31 décembre 2017, un magazine possède 450 000 abonnés. On note que chaque année, seuls 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement auxquels viennent s'ajouter 180 000 nouveaux abonnés.

On note (u_n) une suite modélisant le nombre d'abonnés, exprimé en millier, au 31 décembre de l'année $(2017 + n)$. On a donc $u_0 = 450$.

1. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2018.
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 180$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 900$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.
 - b. Soit n un entier naturel. Exprimer v_n en fonction de n .
 - c. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = -450 \times 0,8^n + 900$.
4. La direction du magazine affirme qu'à long terme, le nombre d'abonnés dépassera 900 000. Que penser de cette affirmation? Justifier la réponse.
5. En s'appuyant sur ce modèle, au 31 décembre de quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 800 000 pour la première fois?
6. La direction du magazine s'engage à verser chaque année 1 euro par abonnement à une association caritative.

On dispose de l'algorithme ci-dessous :

```
U ← 450
S ← 450
Pour I allant de 1 à N
    U ← 0,8 * U + 180
    S ← S + U
Fin Pour
```

antère = 2
Somme

On affecte 3 à la variable N et on exécute l'algorithme.

- a. Après l'exécution, quelle valeur numérique contient la variable S ?
- b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

1) $450\ 000 \times 0,80 + 180\ 000$
 $= 540\ 000.$

donc au 31 décembre de l'année 2018, il y a 540 000 abonnés.

2). Chaque année, seuls 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement, d'où $u_n \times 0,8$.

• De plus, 180 000 nouveaux abonnés s'ajoutent, d'où $u_n \times 0,8 + 180$.

Donc pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 180$.

3) a)
$$v_{n+1} = \underbrace{u_{n+1}}_{= 0,8u_n + 180} - 900$$

$$= 0,8u_n - 720$$

$$= 0,8 \left(u_n - \frac{720}{0,8} \right) \quad \heartsuit \quad \heartsuit$$

$$= 0,8(u_n - 900)$$

$$= 0,8 v_n$$

donc (u_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 900 = 450 - 900 = -450$

b) On a (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = -450$.

Donc $v_n = v_0 \times q^n = -450 \times (0,8)^n$
 $, \forall n \in \mathbb{N}.$

• (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

c) $v_n = u_n - 900$

$$v_n + 900 = u_n$$

d'au $u_n = -450 \times \underbrace{(0,8)^n}_0 + 900$

Long terme = limite

h) • $u_n = -450 \times (0,8)^n + 900$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8)^n = 0$, car $-1 < 0,8 < 1$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 900$.

Ainsi sur du long terme, le nombre d'abonnés va se stabiliser à 900, donc l'affirmation est fausse.

5) $u_6 \approx 782$

$$u_7 \approx 806$$

donc à partir du 31 décembre 2024.

6) a). $S = 450$

$$S = 450 + 540$$

$$S = 450 + 540 + 612$$

donc $S = 1602$

5) Donc au bout de 3 années, ils verseront 1602 euros à une association.

Une entreprise s'intéresse au nombre d'écrans 3D qu'elle a vendus depuis 2010 :

Année	2010	2011	2012
Nombre d'écrans 3D vendus	0	5 000	11 000

Le nombre d'écrans 3D vendus par l'entreprise l'année $(2010 + n)$ est modélisé par une suite (u_n) , arithmético-géométrique, de premier terme $u_0 = 0$.

On rappelle qu'une suite arithmético-géométrique vérifie, pour tout entier naturel n , une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a \times u_n + b$ où a et b sont deux réels.

1. (a) En supposant que $u_1 = 5000$, déterminer la valeur de b .
(b) En supposant de plus que $u_2 = 11000$, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = 1,2 \times u_n + 5000.$$

2. (a) Calculer u_3 et u_4 .
(b) En 2013 et 2014, l'entreprise a vendu respectivement 18 000 et 27 000 écrans 3D.
La modélisation semble-t-elle pertinente?

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que le modèle est une bonne estimation du nombre d'écrans 3D que l'entreprise va vendre jusqu'en 2022.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n + 25000.$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2.
Préciser la valeur de son premier terme v_0 .
(b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 25000 \times 1,2^n - 25000$.
4. On souhaite connaître la première année pour laquelle le nombre de ventes d'écrans 3D dépassera 180 000 unités.

1) a) $u_1 = a \times u_0 + b$

$$5000 = a \times 0 + b$$

$$5000 = b$$

cbnc $b = 5000$

$$b) u_2 = a \times u_1 + 5000$$

$$11000 = 5000 \times a + 5000$$

$$11000 - 5000 = 5000 \times a$$

$$6000 = 5000 \times a$$

$$\frac{6000}{5000} = a$$

$$1,2 = a$$

done

$$u_{n+1} = 1,2 u_n + 5000$$

$$2) a) u_3 = 1,2 u_2 + 5000$$

$$= 1,2 \times 11000 + 5000$$

$$= 18200$$

$$u_4 = 1,2 u_3 + 5000$$

$$= 1,2 \times 18200 + 5000$$

$$= 26840$$

b) Les valeurs trouvées pour u_3 et u_4 sont proches des valeurs réelles de 2613 et 2614, donc la modélisation semble pertinente.