

Suites

exercice :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \geq 0, 0 < u_n < 2$

Soit $P(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$P(n) : 0 < u_n < 2.$$

Montrons que la propriété $P(n)$ est initialisée au rang $n=0$.

Comme pour $n=0$, on a :

d'une part, $u_0 = 1$

cl'autre part, $0 < 1 < 2$

donc $P(0)$ est vérifiée.

Montrons que la propriété $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0.

Supposons que pour un entier $n \geq 0$, $P(n)$ soit vérifiée.

On a alors :

$$0 < u_n < 2$$

$$0 + 1 < u_n + 1 < 2 + 1$$

$$1 < u_{n+1} < 3$$

$$\sqrt{1} < \sqrt{u_n + 1} < \sqrt{3}, \text{ car } \sqrt{\cdot} \text{ est strict}$$

$$0 < 1 < u_{n+1} < \sqrt{3} < 2 \text{ croissante}$$

$$\text{donc } 0 < u_{n+1} < 2.$$

Fonctions

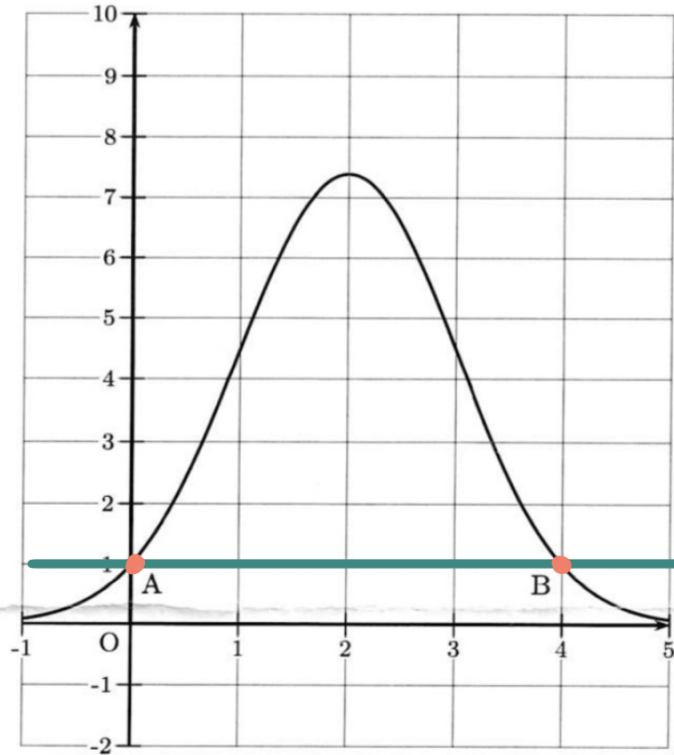
Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-0,5x^2+2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous. Les points A et B appartiennent à $\mathcal{C}_f$.

1. a. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 1$.
b. Quelle interprétation graphique peut-on faire des solutions de l'équation précédente ?
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 3) e^{-0,5x^2+2x}$$

- b. En déduire la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- c. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion C et D dont on déterminera les coordonnées.



1) a) $f(x) = 1$

$$\Leftrightarrow e^{-0,5x^2+2x} = 1 = e^0$$

prop: $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

$$\Leftrightarrow -0,5x^2 + 2x = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 > 0.$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2}{2 \times -0,5} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 2}{2 \times -0,5} = 0.$$

donc les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont

$$\mathcal{S} = \{0; 4\}.$$

b) Les solutions correspondent aux abscisses des points A et B.

$$2) f'(x) = \underbrace{(-x + 2)}_u \underbrace{e^{-0,5x^2 + 2x}}_v$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad a) \quad f''(x) &= -1x e^{-0,5x^2 + 2x} \\
 &\quad + (-x+2)x(-x+2)e^{-0,5x^2 + 2x} \\
 &= e^{-0,5x^2 + 2x} \left[-1 + (-x+2)^2 \right] \\
 &= e^{-0,5x^2 + 2x} (-1 + x^2 - 4x + 4) \\
 &= e^{-0,5x^2 + 2x} (x^2 - 4x + 3)
 \end{aligned}$$

$$b) \quad f''(x) = (x^2 - 4x + 3) \underbrace{e^{-0,5x^2 + 2x}}_{>0}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 \\
 &= 4 > 0
 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$

donc f est convexe sur $]-\infty; 1[\cup [3; +\infty[$ et f est concave sur $[1; 3]$.

c) Comme f'' change de signe
aux points d'abscisse 1 et 3.

Alors E_f admet deux points
d'inflexion $C(1; e^{\pm i\pi})$ et

$D(3; e^{\pm i\pi})$.

$\downarrow$
 $f(1)$

$\downarrow$
 $f(3)$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (4x + 2)e^{-0,5x} - 10.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1)

a. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = (-2x + 3)e^{-0,5x}$

b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2)

Déterminer algébriquement la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On précisera les éventuels points d'inflexion à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3)

a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. En justifiant, préciser l'intervalle sur lequel on a : $(4x + 2)e^{-0,5x} \leq 3x + 2$

1) a)
$$f'(x) = 4x e^{-0,5x} + (4x + 2) x^{-0,5} e^{-0,5x}$$

$$= e^{-0,5x} (4 + (4x + 2) x^{-0,5})$$

$$= e^{-0,5x} (4 - 2x - 1)$$

$$= e^{-0,5x} (-2x + 3)$$

3)

x	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
f'	+	$\emptyset$	-
f			

2)

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -2x e^{-0,5x} \\
 &\quad + (-2x+3)(-0,5 e^{-0,5x}) \\
 &= e^{-0,5x} (-2 + x - 1,5) \\
 &= e^{-0,5x} (x - 3,5).
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$3,5$	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$

donc f est convexe sur $[3,5; +\infty[$ et f est concave sur $] -\infty; 3,5]$.

3) a) $y = 3x - 8$

b) $(4x+2)e^{-0,5x} - 10 \leq 3x - 8$

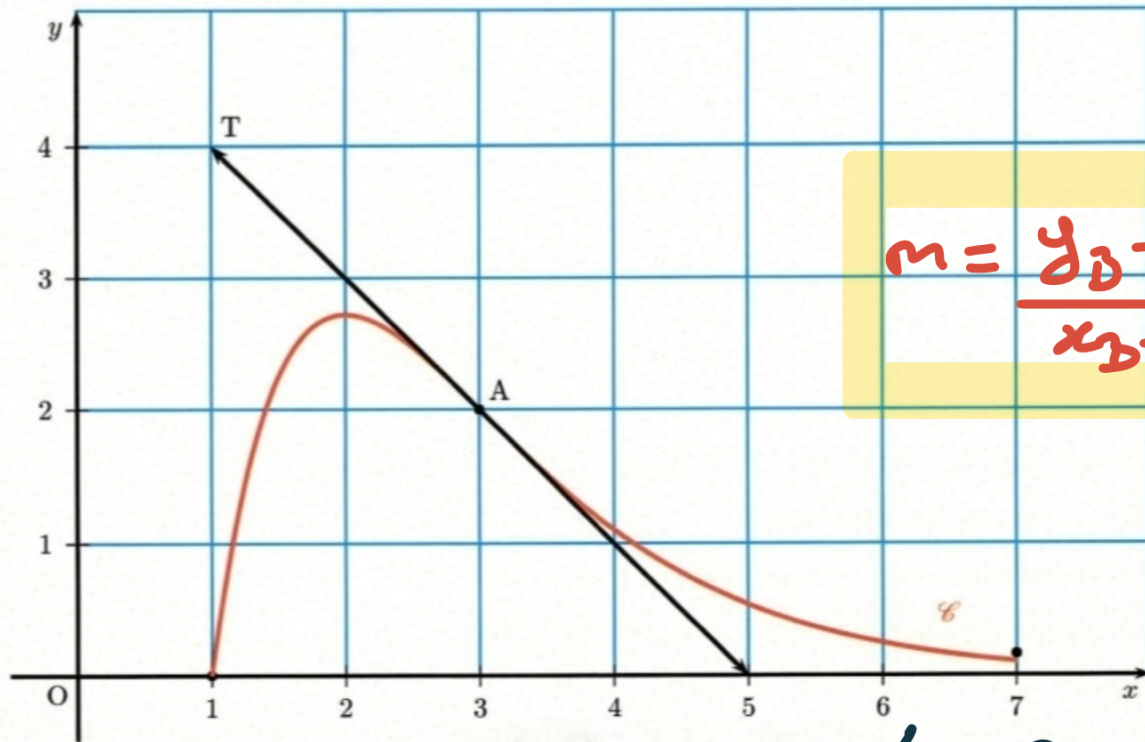
$\Leftrightarrow (4x+2)e^{-0,5x} \leq 3x - 8 + 10$

$\Leftrightarrow (4x+2)e^{-0,5x} \leq 3x + 2.$

QCM : à rendre**Entourer le ou les bonnes réponse(s)**

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[1; 7]$.

La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(3; 2)$ et passe par les points de coordonnées $(1; 4)$ et $(5; 0)$. Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$f'(3) = \frac{4 - 0}{1 - 5} = \frac{4}{-4} = -1$$

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f :

a. $f'(3) = 1$

b. $f'(3) = -1$

c. $f'(3) = 2$

d. $f'(3) = -2$

2. La tangente T admet pour équation réduite :

$$y = -1(x - 3) + 2 = -x + 3 + 2 = -x + 5$$

a. $y = x + 5$

b. $y = -x - 5$

c. $y = -x + 5$

d. $y = x - 5$

3. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f :

a. $f''(3) = 2$

b. $f''(3) = 0$

c. $f''(5) = 0$

d. $f''(2) = 0$

4. Pour tout $x \in [3; 7]$:

a. $f''(x) \leq 0$

b. $f''(x) \geq 0$

c. $f'(x) \geq 0$

d. $f(x) \leq 0$

5. La courbe $\mathcal{C}$ représente sur $[1; 7]$ la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{e^{x-3}}$:

a. $f'(x) = \frac{1}{e^{x-3}}$

b. $f'(x) = \frac{-x}{e^{x-3}}$

c. $f'(x) = \frac{-x+1}{e^{x-3}}$

d. $f'(x) = \frac{-x+2}{e^{x-3}}$