

Fiche 4

exercice 2:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Identité d'Abel : $W' = -pw$

avec $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$

où (y_1, y_2) sont deux solutions de l'équation différentielle.

1) $t y'' + (1 - 2t) y' + (t + 1) y = 0$

• on pose $y_1(t) = e^t$.

$$y_1'(t) = e^t = y_1''(t).$$

$$t \times e^t + (1 - 2t) e^t + (t + 1) e^t$$

$$= \cancel{te^t} + \cancel{e^t} - \cancel{2te^t} + \cancel{te^t} + e^t$$

$$= 0$$

donc y_1 est solution de (E).

2) on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y' \\ -\frac{(1-2t)}{\epsilon} y' - \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon}\right) y \end{pmatrix}$$

on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1-t}{\epsilon} & \frac{2t-1}{\epsilon} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

telles que $Y' = AY$.

3). Par l'identité d'Abel,

$$w'(t) = - \left(\frac{1-2t}{t} \right) w(t).$$

$$= \frac{2t-1}{t} w(t).$$

on a :

$$\int \frac{2t-1}{t} dt$$

$$w(t) = C e^{\quad}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2t-1}{t} dt = \int \frac{2t}{t} - \frac{1}{t} dt$$

$$= \int 2 - \frac{1}{t} dt$$

$$= 2t - \ln(t)$$

$$\text{donc } W(t) = C e^{2t - P_n(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$= C \frac{e^{2t}}{e^{P_n(t)}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$W(t) = C \frac{e^{2t}}{t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{or } W(t) = y_1(t) y_2'(t) - y_1'(t) y_2(t)$$

avec y_2 solution de (E).

$$W(t) = e^t y_2'(t) - e^t y_2(t)$$

$$W(t) = e^t (y_2'(t) - y_2(t)).$$

Donc on a :

$$C \frac{e^{2t}}{t} = e^t (y_2'(t) - y_2(t))$$

$$\boxed{C \frac{e^t}{t} = y_2'(t) - y_2(t)} \quad \underline{\text{EDO 1}}$$

Résolution de $t' \in \text{EDO 1}$:

$$y_2' - y_2 = \frac{C e^t}{t}$$

$$\bullet \quad y_2' - y_2 = 0$$

$$\hookrightarrow y_{2,h}(t) = C_1 e^t, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \quad \text{on pose } y_{2,p}(t) = C_2(t) e^t.$$

on trouve $C_1'(t) e^t = \frac{C e^t}{\epsilon}$

d'où $C_1'(t) = \frac{C}{\epsilon}$

et donc $C_1(t) = C P_n(t)$.

puis $y_{2,\mathbb{R}}(t) = C P_n(t) e^t, C \in \mathbb{R}$.

D'où on a :

$$y_2(t) = C_1 e^t + C P_n(t) e^t.$$

on peut prendre $C = 1$,

$$y_2(t) = \boxed{C_1 e^t} + P_n(t) e^t.$$

↳ multiple de y_1 .

Donc une fonction solution de (E) et indépendante de y_1 est :

$$y_2(t) = \ln(t) e^t, \quad t > 0$$

4) Les solutions générales sur $]0; +\infty[$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \\ &= C_1 e^t + C_2 \ln(t) e^t \end{aligned}$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

exercice 3:

$$y'' + y = e^z.$$

$$\rightarrow y'' + y = 0$$

$$\hookrightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$$y_h(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t).$$

$$\text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\rightarrow$ variation constante d'ordre 2

on cherche une solution particulière sous la forme.

$$y_p(t) = C_1(t) \cos(t) + C_2(t) \sin(t).$$

avec la contrainte :

$$C_1'(t) \cos(t) + C_2'(t) \sin(t) = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= \boxed{C_1'(t) \cos(t) + C_2'(t) \sin(t)} - C_1(t) \sin(t) + C_2(t) \cos(t) \\ &= -C_1(t) \sin(t) + C_2(t) \cos(t). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_p''(t) &= -C_1'(t) \sin(t) - C_1(t) \cos(t) \\ &\quad + C_2'(t) \cos(t) - C_2(t) \sin(t) \end{aligned}$$

d'ae :

$$y'' + y$$

$$= -C_1'(t) \sin(t) - \cancel{C_1(t) \cos(t)} + C_2'(t) \cos(t) - \cancel{C_2(t) \sin(t)}$$

$$+ \cancel{C_1(t) \cos(t)} + \cancel{C_2(t) \sin(t)}$$

$$= \underbrace{-C_1'(t) \sin(t) + C_2'(t) \cos(t)}_{\epsilon^2}$$

$$\alpha \quad y'' + y = \epsilon^2$$

Donc on obtient :

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos(t) + C_2'(t) \sin(t) = 0 \\ -C_1'(t) \sin(t) + C_2'(t) \cos(t) = \epsilon^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow AX = B.$$

avec $A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} \rightarrow \det = 1$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B.$$

d'où $X = \begin{pmatrix} -t^2 \sin t \rightarrow C_1' \\ t^2 \cos t \rightarrow C_2' \end{pmatrix}$

$$C_1(t) = \int -t^2 \sin t \, dt$$

$$= (t^2 - 2) \cos(t) - 2t \sin(t)$$

$$C_2(t) = (t^2 - 2)\sin(t) + 2t\cos(t).$$

$D'_{\text{can}}:$

$$g(t) = C_1(t)\cos(t) + C_2(t)\sin(t)$$

$$= \left[(t^2 - 2)\cos(t) - \cancel{2t\sin(t)} \right] \cancel{\cos(t)}$$

$$+ \left[(t^2 - 2)\sin(t) + \cancel{2t\cos(t)} \right] \cancel{\sin(t)}$$

$$= (t^2 - 2)(\cos^2 + \sin^2) = t^2 - 2$$

1) CNC:

$$g(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + t^2 - 2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$