

Worksheet 1

exercice 10 :

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que
 $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_E$.

$$\text{on a: } \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_E$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (e_1 + 2e_2) + \lambda_2 (e_3 - e_1) + \lambda_3 (e_1 + 2e_3) = 0_E$$

$$\Leftrightarrow e_1 (\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}_{\mu_1}) + e_2 (\underbrace{2\lambda_1}_{\mu_2}) + e_3 (\underbrace{\lambda_2 + 2\lambda_3}_{\mu_3}) = 0_E.$$

$\alpha(e_1, e_2, e_3)$ est une base
de E .

$$\text{donc } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

! Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,
et la famille (f_1, f_2, f_3) est
linéairement indépendante.

! De plus, $\text{card } \{f_1, f_2, f_3\}$
 $= 3 = \dim E$.

Donc (f_1, f_2, f_3) est une base de E .

exercice 11 :

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
 $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_E$.

on a: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_E$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (e_1 + 2e_2) + \lambda_2 (e_2 + e_3) = 0_E$$

$$\Leftrightarrow e_1 (\lambda_1) + e_2 (2\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$+ e_3 (\lambda_2) = 0_E$$

or (e_1, e_2, e_3) est une base de E , donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \quad + \lambda_3 \end{array} \right. \quad (\Rightarrow) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, et la famille (f_1, f_2) est linéairement indépendante.

on pose $f_3 = e_3$.

De même, on démontre que (f_1, f_2, f_3) est linéairement indépendante.

De plus, $\text{card}(\{f_1, f_2, f_3\}) = 3 = \dim E$.

Donc la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E .

exercice 13 :

1) . $0_{\mathbb{R}_3[x]} \in \mathcal{F}$?

$$(x^2 - 3x) \times 0 - 3(x-1)0 + 3 \times 0 = 0$$

donc le polynôme nul $\in \mathcal{F}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathcal{F}$.

Montrons que $\lambda P + Q \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} & (x^2 - 3x)(\lambda P + Q)'' - 3(\lambda - 1)(\lambda P + Q)' \\ & + 3(\lambda P + Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = (x^2 - 3x)(\lambda P'' + Q'') - 3(\lambda - 1)(\lambda P' + Q') \\ & + 3(\lambda P + Q) \end{aligned}$$

$$= \lambda \left[\underbrace{(\lambda^2 - 3\lambda)P'' - 3(\lambda - 1)P' + 3P}_{=0} \right] + \underbrace{[(\lambda^2 - 3\lambda)Q'' - 3(\lambda - 1)Q' + 3Q]}_{=0}$$

or $P \in F$ et $Q \in F$.

donc $(\lambda^2 - 3\lambda)P'' - 3(\lambda - 1)P' + 3P = 0$

et $(\lambda^2 - 3\lambda)Q'' - 3(\lambda - 1)Q' + 3Q = 0$

d'où :

$$(\lambda^2 - 3\lambda)(\lambda P + Q)'' - 3(\lambda - 1)(\lambda P + Q)' + 3(\lambda P + Q) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

donc $\lambda P + Q \in F$.

Donc $\mathcal{F}$ est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) on pose $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$P \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (x^2 - 3x)P'' - 3(x-1)P' + 5P = 0$$

$\downarrow$
 $0_{\mathbb{R}_3[X]}$

$$(x^2 - 3x)P'' - 3(x-1)P' + 3P$$

$$= (x^2 - 3x)(6ax + 2b) - 3(x-1)(3ax^2 + 2bx + c) + 3(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

$$= 6ax^3 + 2bx^2 - 18ax^2 - 6bx - 9ax^3 - 6bx^2 - 3cx + 9ax^2 + 6bx + 3c + 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 3d$$

$$= (6a - 9a + 3a)x^3 + (2b - 18a - 6b + 9a + 3b)x^2 + (-6b - 3c + 6b + 3c)x + (3c + 3d)$$

$$= (-b - 9a)X^2 + (3c + 3d)$$

$$P \in F \Leftrightarrow (-b - 9a)X^2 + (3c + 3d) = 0_{\mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b - 9a = 0 \\ 3c + 3d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -9a \\ d = -c \end{cases}$$

donc :

$$P(X) = aX^3 - 9aX^2 + cX - c.$$

$$= a \underline{(X^3 - 9X^2)} + c \underline{(X - 1)}$$

Donc une famille génératrice

de F est : $\{x^3 - 9x^2; x - 1\}$.

De plus, les monômes sont tous de degré distinct, donc la famille est linéairement indépendante.

Donc $\mathcal{B} = \{x^3 - 9x^2; x - 1\}$ est une base de F .

Ainsi $\dim F = 2$.