

Fiche 5:

exercice 5:

1) on pose $y(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$
une solution de (1).

$$\text{on a : } \begin{cases} y'(t) = \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1} \\ y''(t) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n t^{n-2} \end{cases}$$

• Terme $t(t^2+1)y''$.

$$\begin{aligned} & t(t^2+1) \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n t^{n-2} \\ &= t^3 \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n t^{n-2} + t \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n t^{n-2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n t^{n+1} + \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n t^{n-1}$$

• Terme $(t^2 - 1)y'$.

$$(t^2 - 1) \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}$$

$$= t^2 \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1} - \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}$$

$$= \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n+1} - \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}.$$

Donc:

$$t(t^2 + 1)y'' + (t^2 - 1)y'$$

$$= \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n t^{\overset{k}{\underbrace{n+1}}} + \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n t^{\overset{k}{\underbrace{n-1}}} \\ + \sum_{n \geq 1} n a_n t^{\overset{k}{\underbrace{n+1}}} - \sum_{n \geq 1} n a_n t^{\overset{k}{\underbrace{n-1}}}.$$

$$= \sum_{k \geq 3} (k-1)(k-2)a_{k-1} t^{\overset{k}{\underbrace{\quad}}} + \left. \sum_{k \geq 1} k(k+1)a_{k+1} t^{\overset{k}{\underbrace{\quad}}} \right\} \text{chgt. d'indice}$$

$$\sum_{k \geq 2} (k-1)a_{k-1} t^{\overset{k}{\underbrace{\quad}}} - \sum_{k \geq 0} (k+1)a_{k+1} t^{\overset{k}{\underbrace{\quad}}}.$$

$$\alpha \quad t(t^2 + 1)y'' + (t^2 - 1)y' = 1$$

$$\text{et } 1 = 1 \cdot t^0 + 0 \cdot t^1 + 0 \cdot t^2 + \dots$$

• coefficient $\in \mathbb{C}$, seul la somme

$$- \sum_{k \geq 0} (k+1) a_{k+1} \epsilon^k$$

contient ϵ^0 par $k=0$.

par
le
1

d'où on a: $-a_1 \cdot \epsilon^0 = 1 \cdot \epsilon^0$

$$\Rightarrow -a_1 = 1$$

$$\Rightarrow a_1 = -1$$

par

$$\bullet \sum_{k \geq 1} k(k+1) a_{k+1} \epsilon^k$$

$$= 2a_2 \epsilon + 6a_3 \epsilon^2 + \sum_{k \geq 3} k(k+1) a_{k+1} \epsilon^k$$

$$\bullet \sum_{k \geq 2} (k-1) a_{k-1} \epsilon^k = a_1 \epsilon^2 + \sum_{k \geq 3} (k-1) a_{k-1} \epsilon^k$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \sum_{k \geq 0} (k+1) a_{k+1} t^k \\
 &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\
 &+ \sum_{k \geq 3} (k+1) a_{k+1} t^k
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$t(t^2 + 1)y'' + (t^2 - 1)y'$$

$$\begin{aligned}
 &= \cancel{2a_2 t} + 6a_3 t^2 + a_4 t^3 - a_1 - \cancel{2a_2 t} - 3a_3 t^2 \\
 &+ \sum_{k \geq 3} \left[k(k+1)a_{k+1} + (k-1)a_{k-1} \right. \\
 &\quad \left. + (k-1)(k-2)a_{k-1} - (k+1)a_{k+1} \right] t^k
 \end{aligned}$$

$$= -a_1 + (a_1 + 3a_3)t^2$$

$$+ \sum_{k \geq 3} \left[(k+1)(k-1)a_{k+1} + (k-1)^2 a_{k-1} \right] t^k$$

$$\text{or } t(t^2 + 1)y'' + (t^2 - 1)y' = 1$$

$$\text{avec } 1 = 1 \times t^0 + 0 \times t + 0 \times t^2 + \sum_{k \geq 3} 0 \cdot t^k$$

Donc par unicité du DSE au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \bullet a_1 &= -1 & \bullet a_1 + 3a_3 &= 0 \\ & & \Leftrightarrow a_3 &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\bullet (k+1)(k-1)a_{k+1} + (k-1)^2 a_{k-1} = 0$$

$$\text{or } k \neq 1, \quad (k+1)a_{k+1} + (k-1)a_{k-1} = 0$$

$$2) (n+1)a_{n+1} + (n-1)a_{n-1} = 0$$

• pour les termes impairs :

$$(2k+2)a_{2k+2} + 2ka_{2k} = 0$$

$$\Rightarrow a_{2k+2} = -\frac{2k}{2k+2} a_{2k}$$

on pose $k = k-1$

$$= -\frac{k}{k+1} a_{2k}$$

d'où : $a_{2k} = -\frac{k-1}{k} a_{2k-2}$

j'applique la relation d'en haut avec $k-1$

$$= -\frac{k-1}{k} \times -\frac{k-2}{k-1} \times a_{2k-4}$$

relation avec $k-2$

$$= -\frac{k-1}{k} \times -\frac{k-2}{k-1} \times -\frac{k-3}{k-2} \times a_{2k-6}$$

produit télescopique

$$= -\left(\frac{\cancel{k-1}}{\cancel{k}}\right)x - \left(\frac{\cancel{k-2}}{\cancel{k-1}}\right)x - \left(\frac{\cancel{k-3}}{\cancel{k-2}}\right)x \cdots x - \frac{1}{2} \times a_2$$

donc

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} a_2$$

• pour les termes pairs :

$$(2k+1)a_{2k+1} + (2k-1)a_{2k-1} = 0$$

$$a_{2k+1} = -\frac{2k-1}{2k+1} a_{2k-1}$$

$$= -\left(\frac{2k-1}{2k+1}\right)x - \left(\frac{2k-3}{2k-1}\right)a_{2k-3}$$

j'applique la relation d'en haut avec $k-1$

$$= -\left(\frac{\cancel{2k-1}}{2k+1}\right)x - \left(\frac{\cancel{2k-3}}{\cancel{2k-1}}\right)x - \left(\frac{2k-5}{\cancel{2k-3}}\right)$$

relation avec $k-2$

$$\left[x \cdots x - \frac{1}{2} a_1 \right]$$

↳ produit télescopique.

$$d'oe : a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1} a_1$$

or $a_1 = -1$, donc :

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$$

Donc on a :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} e^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} e^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} a_2 t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} e^{2k+1}$$

$$= a_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} e^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} e^{2k+1}$$

$$= a_2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (t^2)^k}_{\ln(1+t^2)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^{2k+1}}_{\arctan(t)}$$

or le rdc de $\ln(1+t^2)$ donne
 $|t^2| < 1 \Leftrightarrow |t| < 1$

et le rdc de $\arctan$ vaut 1.

Donc le rdc de la
série entière est 1.

3) on a dit que :

$$\begin{aligned} g(t) &= a_2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (t^2)^k}_{\ln(1+t^2)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^{2k+1}}_{\arctan(t)} \\ &= a_2 \ln(1+t^2) - \arctan(t). \end{aligned}$$

Ainsi Des solutions sont de la forme :

$$y(t) = -\arctan(t) + C_1 \ln(1+t^2) + C_2$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.