

6. Métropole juin 2016

Un loueur de voitures dispose au 1^{er} mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.

Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1^{er} mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1^{er} mars de l'année 2015 + n .

On a donc $u_0 = 10\,000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 3\,000$.

2. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = u_n - 12\,000.$$

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.

(b) Exprimer v_n en fonction de n .

Déterminer la limite de la suite (v_n) .

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = 12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n$.

(d) En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

3. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.

On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.

(a) Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Initialisation	U prend la valeur 10 000 N prend la valeur 0
Traitement	Tant que ... N prend la valeur ... U prend la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher ...

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.

1) Comme chaque 1^{er} mars de chaque année, il revend 25% de son parc, alors :

$$u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 0,75u_n.$$

De plus, il achète 3000 nouvelles voitures, donc :

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 3000.$$

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 12000$

$$= 0,75u_n + 3000 - 12000$$

$$= 0,75u_n - 9000$$

$$= 0,75 \left(u_n - \frac{9000}{0,75} \right)$$

$$= 0,75 (u_n - 12000)$$

$$= 0,75 v_n$$

donc (v_n) est géométrique de raison 0,75 et de premier terme $v_0 = u_0 - 12000 = 10000 - 12000 = -2000$

3) (v_n) est géométrique de raison $0,75$ et de premier terme $v_0 = -200$.

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times q^n \\ = -200 \times 0,75^n.$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0, \text{ car } -1 < 0,75 < 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$c) \quad v_n = u_n - 1200$$

$$\Leftrightarrow v_n + 1200 = u_n.$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -200 \times 0,75^n + 1200$$

d) on a vu $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12\ 000$.

Ainsi au bout d'un grand nombre d'année le parc aura un parc de 12 000 voitures.

3. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.

On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.

(a) Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Initialisation	U prend la valeur 10 000 N prend la valeur 0
Traitement	Tant que $u < 11\ 950$ N prend la valeur $N+1$ U prend la valeur $0,75 * U + 3000$
Sortie	Fin Tant que Afficher N

$\hookrightarrow u_{n+1} = 0,75u_n + 3000$

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.

e) $N = 13 \Rightarrow$ année 2028.

EXERCICE 1 [5 points]

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant : pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

3. a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace() :  
    u = 1  
    n = 0  
    while  $u < 1,8$ :  
         $u = 0,9u + 0,25$   
        n = n+1  
    return n
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2,5 - u_n$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.

D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

$$\begin{aligned}
 1) \quad u_1 &= 1 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 0,25 \\
 &= 0,9 \times 1 + 0,25 \\
 &= 1,15.
 \end{aligned}$$

2) bla bla ...

3) a) Initialisation :

d'une part, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,15$

d'autre part, $1 \leq 1,15 < 5$

Hérédité : bla bla bla ...

$$u_n \leq u_{n+1} < 5$$

$$0,9 u_n \leq 0,9 u_{n+1} < 0,9 \times 5$$

$$0,9u_n \leq 0,9u_{n+1} \leq 4,5.$$

$$\underbrace{0,9u_n + 0,25}_{\downarrow} \leq \underbrace{0,9u_{n+1} + 0,25}_{\downarrow} \leq 4,5 + 0,25$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4,75 < 5$$

donc good. . . -

3) on a démontré que la suite (u_n) est croissante et majorée par 5, donc elle est convergente.

$$\left. \begin{array}{l} 4) \\ 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_7 \approx 1,78 \\ u_8 \approx 1,85 \end{array}$$

donc on renvoie $n = 8$.

Au bout de 4h le médicament
sera enfin efficace.