

Probabilité

Exercice 4 (5,25 points)

Soit n un entier naturel non nul.

Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'événements A_n et on note p_n probabilité de l'événement A_n .

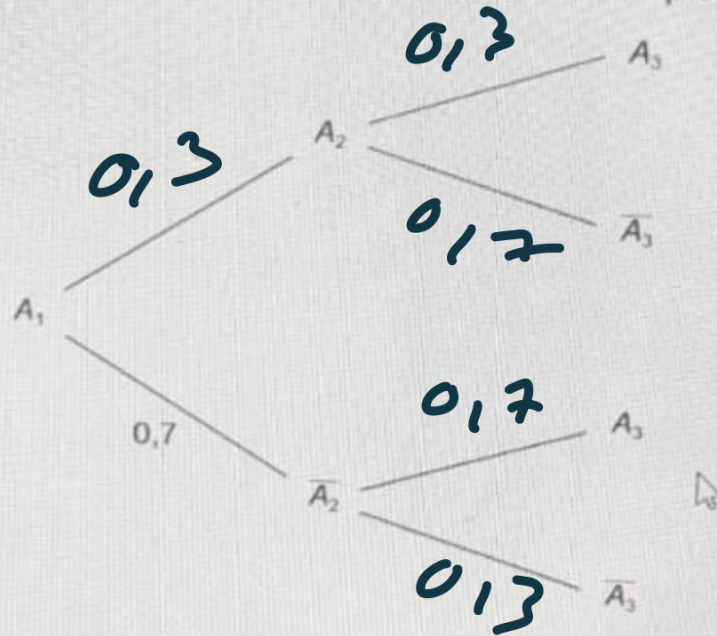
Pour les parties A et B de l'exercice, on considère que :

- Si l'événement A_n est réalisé alors l'événement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3 .
- Si l'événement A_n n'est pas réalisé alors l'événement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7 .

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. Montrer que $p_3 = 0,58$.

3. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à 10^{-2} près.

2) D'après la formule des probabilités totales :

$$P_3 = P(A_3)$$

$$= P(A_2 \cap A_3) + P(\bar{A}_2 \cap A_3)$$

$$= \underbrace{P_{A_2}(A_3)}_{(2)} \times \underbrace{P(A_2)}_{(1)} + \underbrace{P_{A_2}(\bar{A}_3)}_{(2)} \times \underbrace{P(\bar{A}_2)}_{(1)}$$

$$= 0,000$$

$$= 0,58$$

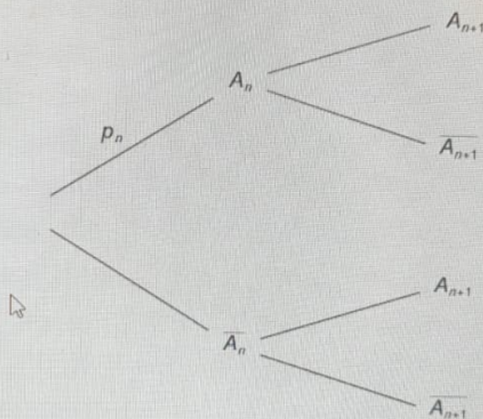
$$3) P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)}$$

$$= \frac{0,3 \times 0,3}{0,58}$$

Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geq 1$.

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = -0,4 p_n + 0,7$.

On considère la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,5$.

b. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de u_n , puis de p_n en fonction de n .

d. Déterminer la limite de la suite (p_n) .

Partie C

2) a) D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1})$$

$$= P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) \times P(\bar{A}_n)$$

= ...

$$\begin{aligned}
 \textcircled{5} \quad u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,5 \leftarrow \\
 &= (0,4p_n + 0,7) - 0,5 \\
 &= -0,4p_n + 0,2 \\
 &= -0,4 \left(p_n + \frac{0,2}{-0,4} \right) \\
 &= -0,4 (p_n - 0,5) \leftarrow \\
 &= -0,4 u_n \leftarrow
 \end{aligned}$$

donc la suite (u_n) est géométrique de raison $-0,4$ et de premier terme :

$$u_1 = p_1 - 0,5 = 1 - 0,5 = 0,5$$

c) • $u_n = \begin{cases} u_1 \times q^{n-1} \\ u_0 \times q^n \end{cases}$

$$u_n = 0,5 \times (-0,4)^{n-1}$$

• $u_n = p_n - 0,5$

$$\Leftrightarrow u_n + 0,5 = p_n.$$

d'après $p_n = 0,5 \times (-0,4)^{n-1} + 0,5$

d) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,4)^{n-1} = 0$

car $-1 < -0,4 < 1$.

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,5$.

Exercice 2 (5 points)

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera $\bar{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.

2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

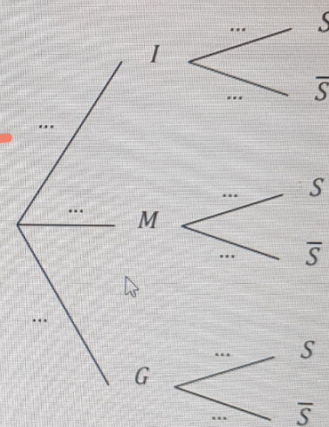
3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ?
On donnera un résultat arrondi à 10^{-2} près.

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.



5) On répète 30 fois de manière identique et indépendante, l'expérience de Bernoulli à deux

issues au de succès est
que le client soit satisfait
avec une probabilité de 0,8.

Donc X suit $\mathcal{B}(30; 0,8)$.