Type DAC 2

1) $u_1 = \dfrac{5}{4}$.

2) a) $a_0 = 2$

$a_1 = 5$

b) $$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2} - \dfrac{1 \times (u_n+2)}{(u_n+2)}}$$

$$= \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1-(u_n+2)}{u_n+2}}$$

$$= \frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2}}{\frac{u_n-1}{u_n+2}}$$

$$= \frac{2u_n+1}{\cancel{u_n+2}} \times \frac{\cancel{u_n+2}}{u_n-1}$$

$$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$

$$\alpha \quad 3a_n - 1 = 3 \times \frac{u_n}{u_n-1} - 1$$

$$= \frac{3u_n}{u_n-1} - 1$$

$$= \frac{3u_n - (u_n-1)}{u_n-1}$$

$$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$

donc $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c) **Initialisation** : $a_0 = 2$

et $3\times 0 - 1 = -1$.

$\Rightarrow 2 \geq -1$ ✓

Hérédité : $a_{n+1} \geq 3(n+1) - 1 = 3n+2$

$$a_n \geq 3n - 1$$

$$3a_n \geq 3(3n-1) = 9n - 3$$

$$3a_n - 1 \geq 9n - 3 - 1$$

$$a_{n+1} \geq 9n - 4 \geq 3n+2$$

- $9n - 4 \geqslant 3n + 2$

$\Longleftrightarrow 9n - 3n \geqslant 2 + 4$

$\Longleftrightarrow 6n \geqslant 6$

$\Longleftrightarrow n \geqslant 1.$

donc $\forall n \geqslant 1$, $9n - 4 \geqslant 3n + 2$,
et donc $a_{n+1} \geqslant 3n + 2$.

d) $\forall n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 3n - 1$.

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\overbrace{3n}^{+\infty} - 1}_{+\infty} = +\infty.$

donc par comparaison

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$

3) a)

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

$$\Longleftrightarrow (u_n - 1) a_n = u_n$$

$$\Longleftrightarrow u_n a_n - a_n = u_n$$

$$\Longleftrightarrow -a_n = u_n - u_n a_n$$

$$\Longleftrightarrow -a_n = u_n (1 - a_n)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-a_n}{1 - a_n} = u_n$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a_n}{a_n - 1} = u_n$$

b) $u_n = \dfrac{\overbrace{a_n}^{+\infty}}{\underbrace{a_n - 1}_{+\infty}}$. F.I

$= \dfrac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_n}\left(1 - \frac{1}{a_n}\right)}$

$= \dfrac{1}{\underbrace{1 - \frac{1}{a_n}}_{1-0}} \to \dfrac{1}{1} = 1$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

exercice 14 :

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = t_n + n \end{cases}$$

2) Supposons que (t_n) est majorée par $M \in \mathbb{R}$.

or on a démontré que (t_n) est croissante.

Donc la suite (t_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.

Alors l doit vérifier :

$$l = l + n$$

$$\Leftrightarrow \quad l - l = n \quad \Leftrightarrow \quad 0 = n$$

or $r_{n+1} - r_n = n$

Donc $r_{n+1} - r_n = 0$,

$r_{n+1} = r_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

↳ (r_n) est stationnaire, impossible.

$$\lim_{n \to +\infty} r_{n+1} - r_n = \ell - \ell = 0$$

or $r_{n+1} - r_n = n$,

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} r_{n+1} - r_n = \lim_{n \to +\infty} n$$

$$0 = +\infty$$