

Fiche 1

exercice 6:

1) $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

$$x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} \overbrace{x^3 \times \frac{1}{x}}^{f(x)} = x^2.$$

↳ car $\sin x \underset{0}{\sim} x$

or $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$

donc par Équivalence $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Donc on peut prolonger par continuité f en 0, en posant $f(0) = 0.$

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = ?$$

$$f(0+h) = f(h) = h^3 \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\text{or } f(0) = 0.$$

$$\text{donc } \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^3 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ = h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

$$\text{or } h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h^2 \times \frac{1}{h} = h.$$

et $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$, d'où par

équivalent $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$.

Donc $\tilde{f}$ est dérivable en 0.

Faible 2:

exercice 1:

2) $y'' + 4ty' + 2y = 0$

on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

d'où $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -4ty' - 2y \end{pmatrix}.$

on pose $f(t, Y) = \begin{pmatrix} y' \\ -4ty' - 2y \end{pmatrix}$

exercice 2 :

1)

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + ty_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

et on a $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 + ty_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}.$

donc on pose $f(t, Y) = \begin{pmatrix} 2y_1 + ty_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}.$

Fiche 3:

exercice 1:

$$\bullet y_1(t) = e^{-t} \quad \bullet y_2(t) = e^{t^2}.$$

Les deux solutions sont indépendantes car les deux polynômes dans les exponentielles sont de degrés différents.

↳ donc les solutions sont de la forme :

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t).$$

$$= C_1 e^{-t} + C_2 e^{t^2}$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

exercice 4:

1)
$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$$

on pose $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et

on a $Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$

on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

① on diagonalise / trigonalise A

$$A = P D P^{-1}, \text{ avec}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad e^{tA} = P \underbrace{e^{tD}}_{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}} P^{-1}$$

$$e^{tA} = P \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}}_{\text{base der solution}} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{-2t} & 3e^{5t} \\ e^{-2t} & 4e^{5t} \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4e^{-2t} + 3e^{5t} & -3e^{-2t} + 3e^{5t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{5t} & 3e^{-2t} + 4e^{5t} \end{pmatrix}$$

Dann:
$$X(t) = e^{At} \underbrace{X_0}_{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \times \underbrace{v_1}_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{propre} \\ \text{de } \lambda_1}} + C_2 e^{\lambda_2 t} \times \underbrace{v_2}_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{propre} \\ \text{de } \lambda_2}}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} -C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{5t} \\ C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{5t} \end{pmatrix}$$

et $\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{5t} \\ y(t) = C_1 e^{-2t} + 4C_2 e^{5t} \end{cases}$