

Continuité

exercice 1:

$$h(-1) = 0 \quad h(1) = 4.$$

$$h(3) = -1.$$

TVI: . f continue sur $[a; b]$

. $p \in f([a; b])$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = p$ admet
au moins une solution

Théorème de la bijection :

- f continue sur $[a; b]$
- f strictement monotone sur $[a; b]$
- $\lambda \in f([a; b])$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet exactement une solution.

Comme h continue sur $[1; 3]$
et $h(1) = 4 > 1$ et $h(3) = -1 < 1$

donc d'après le TVI il existe
au moins un nombre réel $a \in [1; 3]$
tel que $h(a) = 1$.

exercice 2:

1) $f(t) = (60t + 40) e^{-0,5t}$

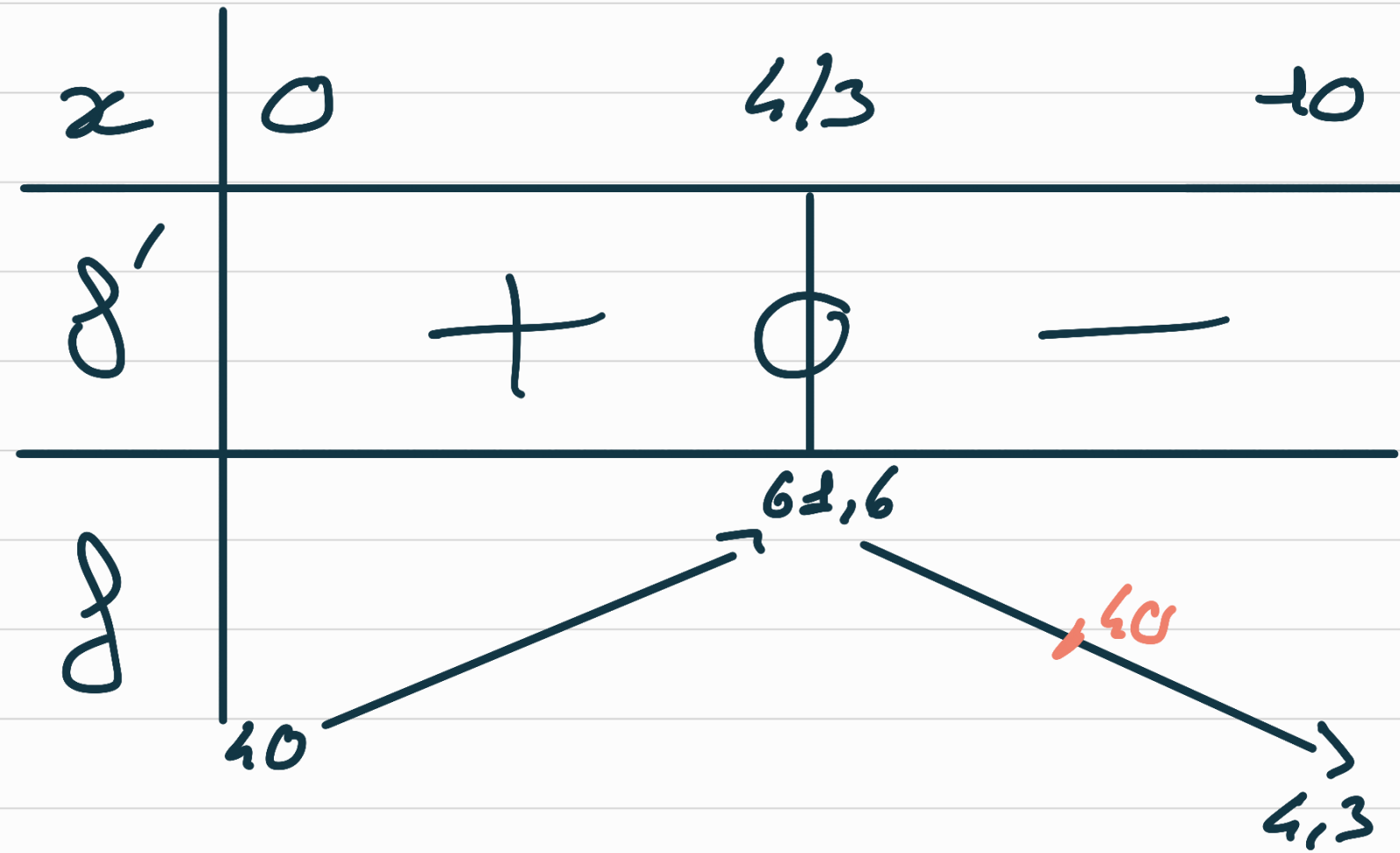
$u' = 60$ $v' = -0,5 e^{-0,5t}$

d'où :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 60 e^{-0,5t} + (60t + 40) \times -0,5 e^{-0,5t} \\ &= e^{-0,5t} (60 + (60t + 40) \times -0,5) \\ &= e^{-0,5t} (60 - 30t - 20) \\ &= e^{-0,5t} (40 - 30t) \end{aligned}$$

2) $f'(t) = \underbrace{e^{-0,5t}}_{>0} \underbrace{(40 - 30t)}_{?}$

$$\bullet 40 - 30t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-40}{-30} = \frac{4}{3}$$



3) f continue sur $[4/3; 10]$

f strictement décroissante sur $[4/3; 10]$.

$$\bullet f(4/3) > 40 \text{ et } f(10) < 40$$

donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 40$ admet une unique solution sur $[4/3; t_0]$.

De plus, l'unique solution sur $[0; 4/3]$ est 0.

Donc sur $]0; t_0]$, il existe une unique solution de l'équation $f(x) = 40$.

c) $\alpha \simeq 3,8$

Au bout d'environ 3,8 minutes, la température redescend à 40°C .

exercice 3:

1) $v_1 = -0,05 v_0^2 + 1,1 v_0$
 $= 4,8$.

donc la population au 1^{er} janvier 2016 est de 4800.

2) $f'(x) = -0,05 \times 2x + 1,1$
 $= -0,1x + 1,1$

• $-0,1x + 1,1 = 0 \Leftrightarrow x = 11$.

x	$-\infty$	0	11	$+\infty$
f'		+	0	-

donc f est croissante sur $[0; 11]$

3) Initialisation :

- $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$.

- $2 \leq 4,8 \leq 6 \leq 6$ ✓

Hérédité :

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$$

or $v_{n+1} = f(v_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et f est croissante sur $[0; 11]$.

$$f(2) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(6)$$

$$2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 4,8 \leq 6. \quad \checkmark$$

$$4) \quad 2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$$

$\hookrightarrow$ décroissante.

on a démontré que la suite (v_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge.

5) a) Comme $v_{n+1} = f(v_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et que (v_n) converge vers l et f est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors $f(l) = l$.

$$- 0,05l^2 + 1,1l = l$$

$$- 0,05l^2 + 1,1l - l = 0$$

$$-0,05P^2 + 0,1P = 0$$

$$\hookrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \dots$$

$$P = 0 \quad \text{or} \quad P = 2$$

$$\text{or } \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq 2, \text{ donc } \underline{\underline{P=2}}$$

$\hookrightarrow$ A long term, the population
will stabilize at 2000.