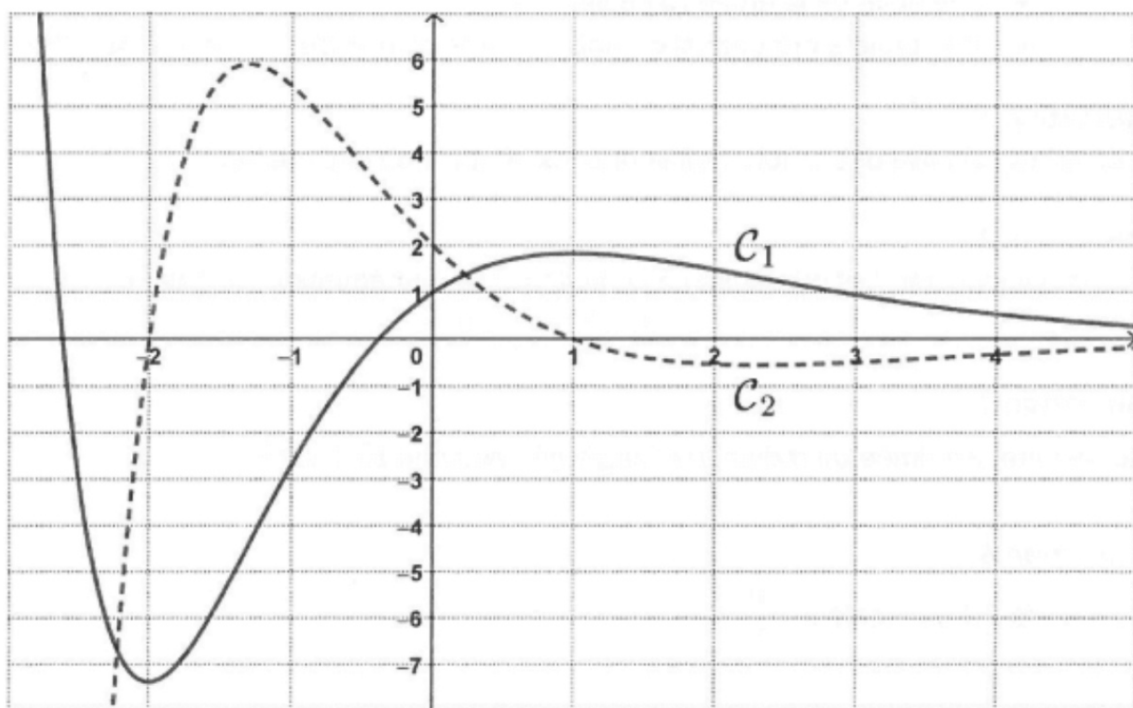


On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g' .

On précise également que :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 1)$.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2; 0)$ et $(1; 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

1) $\mathcal{C}_1$ représente une fonction décroissante sur $] -\infty; -2]$ puis croissante sur $[-2; 1]$ et enfin décroissante sur $[1; +\infty[$.

$\mathcal{C}_2$ représente une fonction négative sur $] -\infty; -2]$ puis positive sur $[-2; 1]$ et négative

sur $[1; +\infty[$.

Donc on peut en déduire que E_1 représente la fonction g et E_2 représente sa dérivée g' .

2) La tangente de E_g au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

or par lecture graphique $g'(0) = 2$ et $g(0) = 1$.

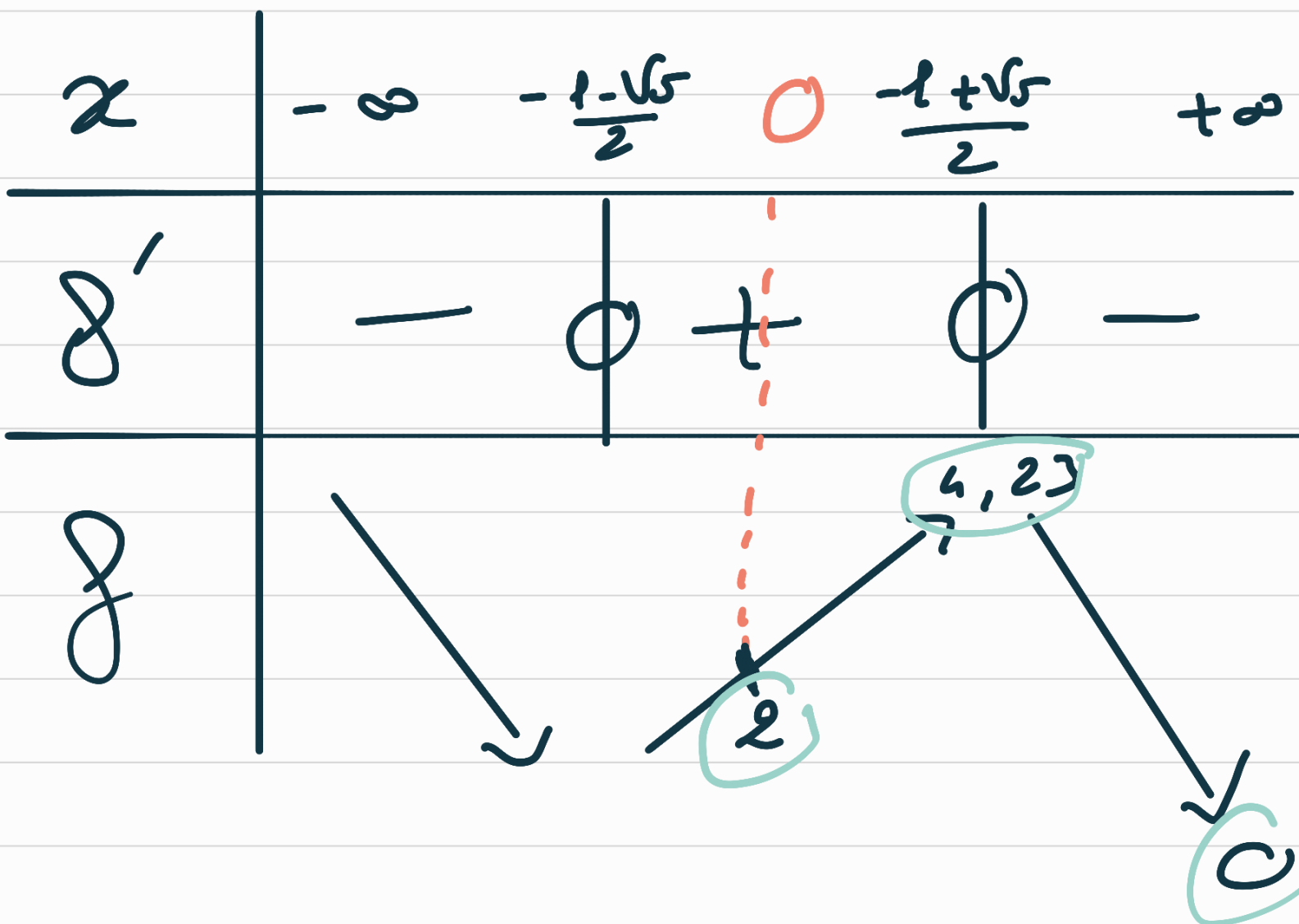
Donc $y = 2x + 1$

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

1. ~~Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.~~
~~On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.~~
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
 - a. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.
 - b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.



Exercice 1 5 points

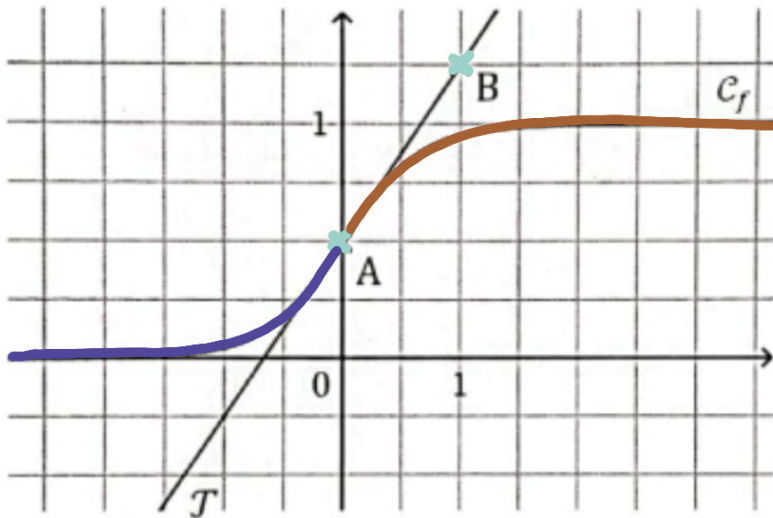
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $(0; \frac{1}{2})$ et B le point de coordonnées $(1; \frac{5}{4})$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$, et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : Lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

$$1) \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad f'(0) = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{4}.$$

donc une équation de γ
est $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

2) La fonction semble convexe
sur $]-\infty; 0]$ et concave sur
 $[0; +\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f' .
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ~~3. a. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f .~~
- ~~b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f .~~
- ~~4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$.~~

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f .
On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. a. Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

b. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

$$1) f'(x) = \frac{-(-3e^{-3x})}{(1 + e^{-3x})^2} = \frac{3e^{-3x}}{(1 + e^{-3x})^2}$$

$$2) \text{ Comme } 3e^{-3x} > 0 \text{ et } (1 + e^{-3x})^2 > 0, \text{ donc } f' > 0 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ et donc } f \text{ est strict. } \nearrow.$$

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f .
On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f''(x) = \frac{\overbrace{9e^{-3x}}^{>0} (\overbrace{e^{-3x} - 1}^{>0})}{\underbrace{(1 + e^{-3x})^3}_{>0}}$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

3. a. Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

b. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$.

4. En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

$$1) f(0) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}.$$

$$f'(0) = \frac{3 \times e^0}{(1 + e^0)^2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{donc } y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

$$2) . g e^{-3x} > 0$$

$$. 1 + e^{-3x} > 0, \text{ d'où}$$

$$(1 + e^{-3x})^3 > 0$$

$$. e^{-3x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-3x} > 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-3x} > e^0$$

$$\Leftrightarrow -3x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{0}{-3} = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g''	$+$	0	$-$

3) a) La fonction est
convexe sur $]-\infty; a]$
car f'' est positive sur $]-\infty; a]$.

b) A représente le point
d'inflexion.

4) Comme f est convexe
sur $]-\infty; a]$, alors T est
au-dessous de E_f sur $]-\infty; a]$.

Comme f est concave
sur $[0; +\infty[$, alors T est
au-dessus de E_f sur $[0; +\infty[$.