

Examen

exercice A.1:

$$1) \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_N$$

$$= 2I + N$$

$$e^{tA} = e^{t(2I+N)}$$

$$= e^{2tI} \times e^{tN}$$

$$\alpha \quad e^{2tI} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } e^{\epsilon N} = \sum_{k \geq 0} \frac{(\epsilon N)^k}{k!}$$

$$\alpha \quad N^k = 0, \quad k \geq 2.$$

$$\text{d'apr } e^{\epsilon N} = I + \epsilon N$$

Donc :

$$e^{\epsilon A} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} (I + \epsilon N).$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

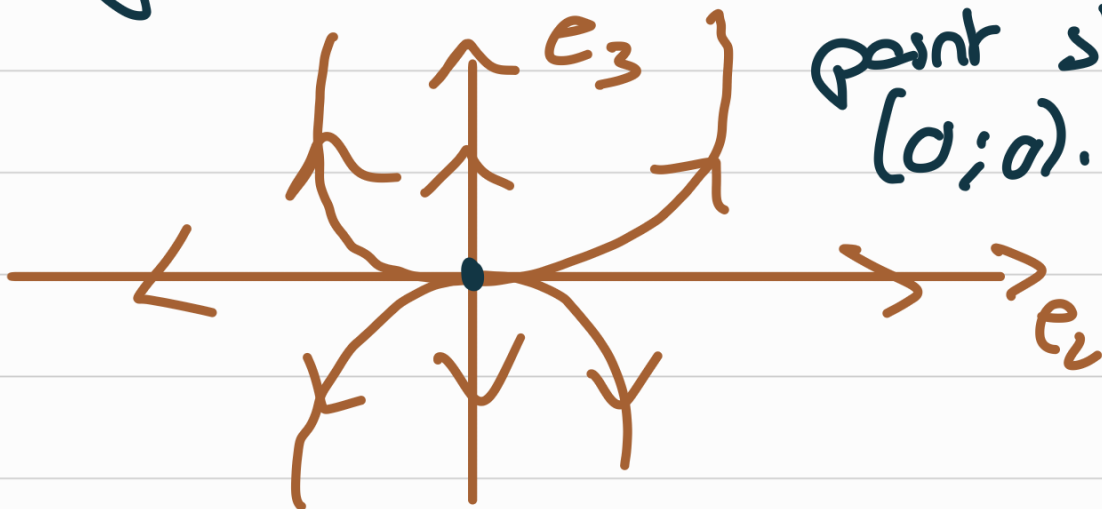
$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & \epsilon e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

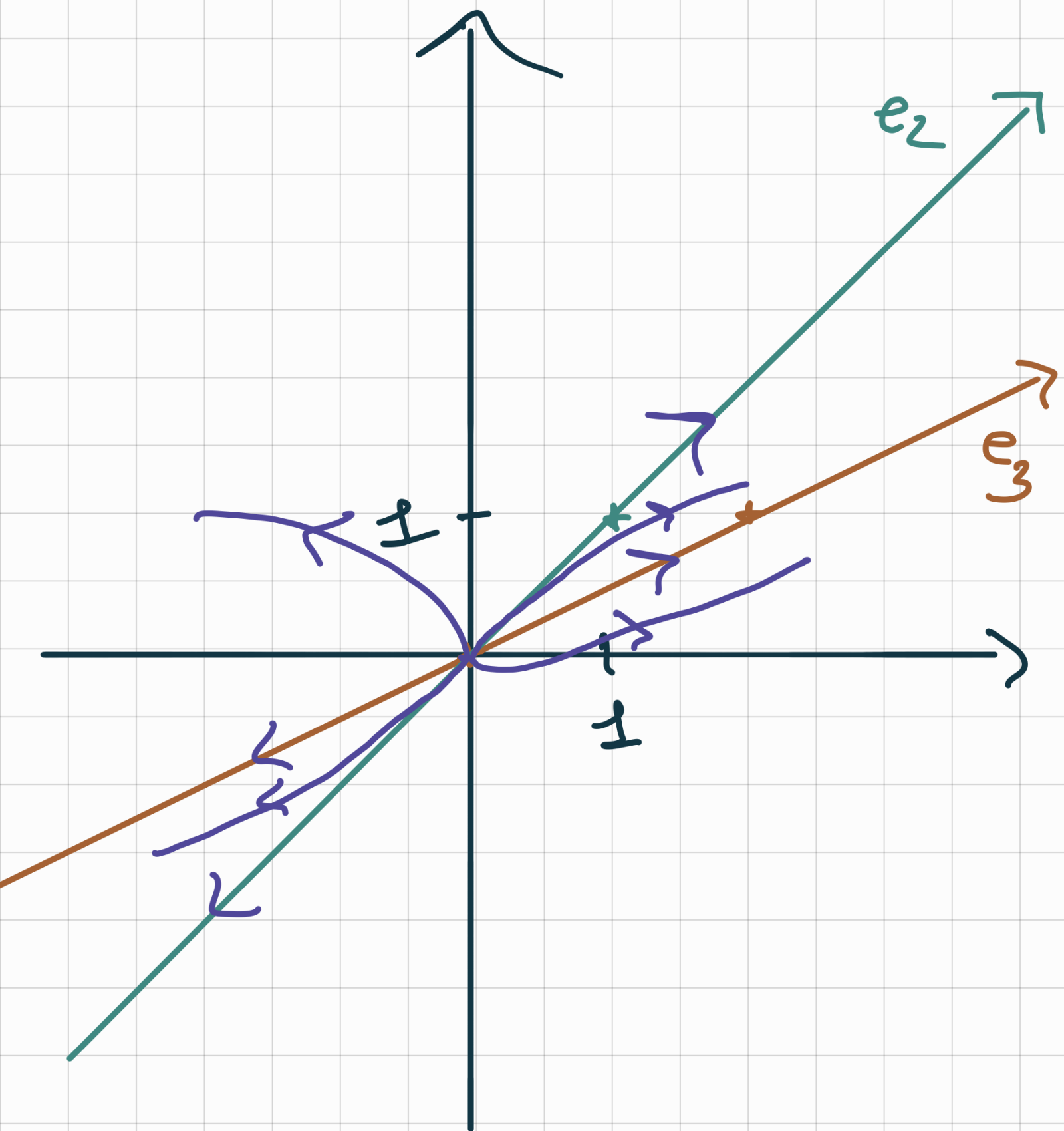
2) on pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$
$$= (\lambda - 3)(\lambda - 2)$$

$$e_3 = (2, 1) \quad e_2 = (1, 1)$$

Ici $0 < 2 < 3$, donc
c'est un noeud impropre
répulsif / instable au voisinage du
point stationnaire
(0;0).





$$3) \quad y'' + 3y' - y = 0$$

$$y'(y'' + 3y' - y) = 0$$

$$\underbrace{y' y''}_{(u^2)'} + \underbrace{3y' y'}_{(u^3)'} - \underbrace{y' y}_{(u^4)'} = 0$$

$= 2uu'$ $= 3u^2u'$ $= 2uu'$

$$\left(\frac{(y')^2}{2} \right)' + (y^3)' - \frac{1}{2} (y^2)' = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(y')^2}{2} + y^3 - \frac{1}{2} y^2 \right] = 0$$

Donc on pose une
intégrale première :

$$E(y(t)) = \frac{(y')^2}{2} + y^3 - \frac{y^2}{2}.$$

exercice A.2:

1) on pose $\mathcal{S} = \{y: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ solutions de (E)}\}$.

$$\bullet \quad \epsilon x \, 0'' + 2x \, 0' + \omega^2 \epsilon x \, 0 = 0$$

donc la fonction identiquement nulle est solution de (E), et donc $y \equiv 0 \in \mathcal{S}$.

• Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\epsilon x (\lambda y_1 + y_2)'' + 2x (\lambda y_1 + y_2)' + \omega^2 \epsilon x (\lambda y_1 + y_2) = 0$$

$$= \lambda (y_1'' + t y_2'' + 2\lambda y_1' + 2y_2' + \omega^2 t y_1 + \omega^2 t y_2)$$

$$= \lambda \underbrace{(t y_1'' + 2y_1' + \omega^2 t)}_{=0 \text{ car } y_1 \in \Delta} + \underbrace{(t y_2'' + 2y_2' + \omega^2 t y_2)}_{=0 \text{ car } y_2 \in \Delta}$$

$$= \lambda \times 0 + 0$$

$$= 0.$$

Donc $\lambda y_1 + y_2 \in \Delta$, et ainsi Δ est un sev de $\mathcal{E}^2([0, +\infty[; \mathbb{R})$.

De plus, (E) est une équation différentielle homogène linéaire d'ordre 2, avec $t \mapsto \frac{2}{t}$ et $t \mapsto \omega^2$ continues.

donc λ est de dimension 2.

2) a) Comme $\sin(\omega t) \sim_0 \omega t$
alors $\frac{\sin(\omega t)}{\omega t} \sim_0 \frac{\omega t}{\omega t} = 1.$

donc $\lim_{t \rightarrow 0} y_1(t) = 1$ par
équivalence.

Ainsi par prolongement par
continuité la valeur de y_1 en
0 est 1.

b)
$$y_1'(t) = \frac{\omega \cos(\omega t) \times \omega t - \sin(\omega t) \times \omega}{(\omega t)^2}$$

$$y'_1(t) = \frac{\omega^2 t \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)}{\omega^2 t^2}$$

$$= \frac{\cos(\omega t)}{t} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega t^2}$$

$$y''_1(t) = \frac{-\omega \sin(\omega t) \times t - \cos(\omega t)}{t^2}$$

$$- \frac{\omega \cos(\omega t) \times \omega t^2 + 2t\omega \sin(\omega t)}{\omega^2 t^4}$$

$$= - \frac{\omega \sin(\omega t)}{t} - \frac{\cos(\omega t)}{t^2} - \frac{\cos(\omega t)}{t^2} + \frac{2 \sin(\omega t)}{\omega t^3} .$$

$$\epsilon y_1'' + 2y_1' + \omega^2 \epsilon y$$

$$= -\omega \sin(\omega t) - \frac{2\cos(\omega t)}{\epsilon} + \frac{2\sin(\omega t)}{\omega t^2} + \frac{2\cos(\omega t)}{\epsilon} - \frac{2\sin(\omega t)}{\omega t^2} + \frac{\omega^2 \cancel{\epsilon} \sin(\omega t)}{\cancel{\omega \epsilon}}$$

$$= -\omega \sin(\omega t) + \omega \sin(\omega t)$$

$$= 0.$$

donc y_1 est solution de
(E) sur $]0; +\infty[$.

$$3) \quad y(t) = z(t) y_1(t)$$

$$y'(t) = z'(t) y_1(t) + z(t) y_1'(t)$$

$$\begin{aligned}
 y''(t) &= z''(t) y_1(t) + z'(t) y_1'(t) \\
 &\quad + z'(t) y_1'(t) + z(t) y_1''(t) \\
 &= z''(t) y_1(t) + 2z'(t) y_1'(t) \\
 &\quad + z(t) y_1''(t)
 \end{aligned}$$

or y est solution de (E).

$$\bullet \epsilon y'' + 2\epsilon y' + \omega^2 \epsilon y = 0$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \epsilon (z'' y_1 + 2z' y_1' + z y_1'') \\
 + 2(z' y_1 + z y_1') + \omega^2 \epsilon z y_1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \epsilon z'' y_1 + 2\epsilon z' y_1' + \epsilon z y_1'' \\
 + 2z' y_1 + 2z y_1' + \omega^2 \epsilon z y_1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \epsilon z'' y_1 + 2\epsilon z' y_1' + 2z' y_1 \\ & + z (\epsilon y_1'' + 2y_1' + \omega^2 \epsilon y_1) = 0 \\ & = 0 \text{ car } y_1 \text{ solution} \end{aligned}$$

$$\epsilon z'' y_1 + z' (2\epsilon y_1' + 2y_1) = 0$$

4) on pose $x(t) = z'(t)$.

$$\begin{aligned} & \epsilon y_1 x' + (2\epsilon y_1' + 2y_1) x = 0 \\ & x' + \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + \frac{2}{\epsilon} \right) x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{or: } \int 2 \frac{y_1'}{y_1} + \frac{2}{\epsilon} d\epsilon$$

$$= 2 \ln(y_1) + 2 \ln(\epsilon)$$

$$c' c \bar{e}$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= C_1 e^{-2\ln(y_1) - 2\ln(t)}, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\
 &= C_1 e^{\ln(y_1^{-2} \times t^{-2})}, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{C_1}{t^2 y_1^2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$z'(t) = \frac{C_1}{t^2 y_1^2} = \frac{C_1}{\frac{\cancel{t^2} \sin^2(\omega t)}{\omega^2 \cancel{t^2}}}$$

$$= \frac{C_1 \omega^2}{\sin^2(\omega t)}$$

$$\text{or } \sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$$

donc $z'(t) = \frac{2C_1 \omega^2}{1 - \cos(2\omega t)}$

or $\int \frac{2\omega^2}{1 - \cos(2\omega t)} = -\omega \cot(\omega t)$

$$\cot(\omega t) = \frac{1}{\tan(\omega t)}$$

donc $z(t) = -C_1 \omega \cot(\omega t) + C_2$

Ainsi :

$$y(t) = z(t) g_1(t)$$

$$= (C_2 - C_1 \omega \cot(\omega t)) \times \frac{\sin(\omega t)}{\omega t}$$

$$= C_2 \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} - C_1 \omega \frac{\cos(\omega t)}{t}$$