

Examen

exercice A.3:

2) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}.$

$$\cdot r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2$$

$$\hookrightarrow y_h(t) = (C_1 + tC_2)e^t,$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

on pose $y(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)te^t.$

avec $C_1'(t)e^t + C_2'(t)te^t = 0$

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)te^t = 0 \\ C_1'(t)e^t + C_2'(t)(e^t + te^t) = \frac{e^t}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(t) + t C_2'(t) = 0 \\ C_1'(t) + C_2'(t) + t C_2'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(t) + t C_2'(t) = 0 \\ C_2'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

d'ailleurs $C_2(t) = \ln(t)$

et $C_1'(t) + 1 = 0$

$$C_1'(t) = -1 \Rightarrow C_1(t) = -t$$

Donc on a :

$$y_{\text{sp}}(t) = -t e^t + t P_n(t) e^t$$

Donc l'ensemble des solutions sont :

$$y(t) = \underbrace{(C_1 + t C_2)}_{y_h} e^t + \underbrace{e^t (t P_n(t) - t)}_{y_{\text{sp}}}$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

$$y_h = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

↳ variation de la constante

on pose $y_{\text{sp}}(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$

Pour trouver $C_1(t)$ et $C_2(t)$, il faut toujours résoudre :

$$\begin{cases} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = b(t) \end{cases}$$

exercice A.4 :

$$\begin{cases} y' = y - y^2 \\ y(0) = y_0 > 1 \end{cases}$$

1) a) on pose $f(y) = y - y^2$
telle que $y' = f(y)$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$.

• f est C^1 sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier localement Lipschitzienne par rapport à y .

Donc d'après le théorème de Cauchy - Lipschitz il existe une unique solution maximale pour toute condition initiale $y(0) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}; +\infty[$.

b) $y' = y - y^2$

$$\frac{y'}{y - y^2} = 1$$

$$\frac{dy}{y - y^2} = dt.$$

$$\int \frac{dy}{y-y^2} = \int dt$$

$t + C$

$$\hookrightarrow \frac{1}{y-y^2} = \frac{1}{y(1-y)}$$

$$= \frac{a}{y} + \frac{b}{1-y}$$

$$a = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1-y} = 1$$

$$b = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{y} = 1$$

$$\text{done } \frac{1}{y-y^2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

$$\int \frac{dy}{y-y^2} = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} dy$$

$$= \ln|y| - \ln|1-y|$$

$$= \ln\left|\frac{y}{1-y}\right|.$$

Donc :

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = t + C$$

$$\frac{y}{1-y} = e^{t+C} = \underbrace{e^C}_K e^t$$

$$y = (1-y) K e^t$$

$$y = Ke^t - Ke^t y$$

$$y + Ke^t y = Ke^t$$

$$y(1 + Ke^t) = Ke^t.$$

Donc les solutions sont de la forme :

$$y(t) = \frac{Ke^t}{1 + Ke^t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \quad y(0) = y_0$$

$$\text{et } y(c) = \frac{K}{1+K}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{1+K} = y_0 \Rightarrow K = y_0(1+K) \\ \Rightarrow K = y_0 + Ky_0.$$

$$\Rightarrow K - Ky_0 = y_0$$

$$\Rightarrow K(1 - y_0) = y_0$$

$$\Rightarrow K = \frac{y_0}{1 - y_0}$$

Donc l'unique solution :

$$y(t) = \frac{\frac{y_0}{1 - y_0} e^t}{1 + \frac{y_0}{1 - y_0} e^t}$$

$$= \frac{\frac{y_0}{1 - y_0} e^t}{\frac{1 - y_0 + y_0 e^t}{1 - y_0}}$$

$$= \frac{y_0 e^t}{\cancel{1 - y_0}} \times \frac{\cancel{1 - y_0}}{1 + y_0(e^t - 1)}$$

$$y(t) = \frac{y_0 e^t}{1 + y_0(e^t - 1)}.$$

$$1 + y_0(e^t - 1) = 0$$

$$y_0(e^t - 1) = -1$$

$$e^t - 1 = \frac{-1}{y_0}$$

$$e^t = 1 - \frac{1}{y_0} = \frac{y_0 - 1}{y_0}$$

$$t = \ln \left(\frac{\sqrt[y_0-1]{y_0-1}}{y_0} \right) < 0$$

Donc y est bien définie
sur : $\bigcup \ln \left(\frac{y_0-1}{y_0} \right) ; +\infty [$.

$$2) \quad y(t) = \frac{y_0 e^t}{1 + y_0(e^t - 1)}$$

$$= \frac{\cancel{e^t} \times y_0}{\cancel{e^t} \left(\frac{1}{\cancel{e^t}} + y_0 - \frac{y_0}{\cancel{e^t}} \right)}$$

$$= \frac{y_0}{y_0 - y_0 e^{-t} + e^{-t}}$$

$$= \frac{\cancel{y_0}}{\cancel{y_0} \left(1 - e^{-t} + \frac{e^{-t}}{\cancel{y_0}} \right)}$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-t} \left(\frac{1}{y_0} - 1 \right)}$$

or $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, et

donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{y_0} - 1 \right) = 0$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$

exercice A.5:

2) $y'' + |y| + \cos((y')^2) = \frac{t^2}{1+t^2}$

a) on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$
et $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{t^2}{1+t^2} - |y_0| - \cos(y_1^2) \end{pmatrix}$

on pose :

$$F(t, Y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{t^2}{1+t^2} - |y_0| - \cos(y_1^2) \end{pmatrix}$$

telle que $Y' = F(t, Y)$.

b)

$$F(t, Y) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{1+t^2} - |Y_0| - \cos(Y_1^2) \\ F_2(t, Y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_1(t, Y) \\ F_2(t, Y) \end{pmatrix}$$

• $F_1(t, Y)$ est $\mathcal{C}^1$ par rapport à Y , donc elle est localement Lipschitzienne par rapport à Y .

• Soit Y et Y^* .

$$|F(t, Y) - F(t, Y^*)|$$

$$= \left| \frac{t^2}{1+t^2} - |Y_0| - \cos(Y_1^2) - \frac{t^2}{1+t^2} + |Y_0^*| + \cos(Y_1^{*2}) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| |Y_0^*| - |Y_0| + \cos(Y_1^{*2}) - \cos(Y_1^2) \right| \\
&\leq \left| |Y_0^*| - |Y_0| \right| + \underbrace{\left| \cos(Y_1^{*2}) - \cos(Y_1^2) \right|}_{\leq 2} \\
&\leq |Y_0^* - Y_0| + |Y_1^* - Y_1| \stackrel{\leq 2}{\text{on prend}} \\
&\leq \|Y - Y^*\|_1 \quad \begin{array}{l} \|Y\| \leq R \\ \text{et } \|Y^*\| \leq R. \\ \text{avec } R \leq 2. \end{array} \\
&\quad \underbrace{|Y_0 - Y_0^*| + |Y_1 - Y_1^*|}_{\text{red}}
\end{aligned}$$

donc F_2 est localement Lipschitz.
par rapport Y .

Donc F est local. Lipschitz.
par rapport Y .

c . F est continue en toutes ses variables.

. F est loc. Lipschitz par rapport Y .

Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une unique solution maximale $\tilde{c}(t)$ pour toute condition initiale $y(t_0) = y_0$; $y'(t_0) = y_1$.