

Exercice 3 On considère trois points A , B et C de l'espace non alignés et les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}.$$

1. a) À l'aide de la relation de Chasles, compléter : $\overrightarrow{CM} = \dots + \overrightarrow{AM}$.
b) En déduire $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En s'inspirant de la question 1, exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Justifier que les points C , N et M sont alignés.
4. On considère le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
Justifier que $APCN$ est un parallélogramme.

1) a) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$

b) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$
 $= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 $= -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \vec{CN} &= \vec{CD} + \vec{DN} \\
 &= \vec{CB} + 3\vec{AC} - 2\vec{AB} \\
 &= \vec{CA} + \vec{AB} + 3\vec{AC} - 2\vec{AB} \\
 &= -\vec{AC} + \vec{AB} + 3\vec{AC} - 2\vec{AB} \\
 &= 2\vec{AC} - \vec{AB}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \vec{CM} &= -\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB} \\
 \vec{CN} &= 2\vec{AC} - \vec{AB}
 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \times -2 \downarrow & & \uparrow \times -2 \end{matrix}$

donc $\vec{CN} = -2\vec{CM}$, et
 donc les vecteurs $\vec{CN}$ et $\vec{CM}$
 sont colinéaires et les points
 C, N, M sont alignés

4) $APCN$ est un parallélogramme
 $\Leftrightarrow \vec{AP} = \vec{NC}$

$$\vec{AP} = \vec{AB} - 2\vec{AC}$$

$$\text{or } \vec{CN} = 2\vec{AC} - \vec{AB}$$

$$\text{donc } \vec{NC} = -(2\vec{AC} - \vec{AB}) \\ = -2\vec{AC} + \vec{AB}.$$

Donc $\vec{AP} = \vec{NC}$ et que
 $APCN$ est un parallélogramme.

Exercice 4 On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace et D tels que

$$3\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} + 4\overrightarrow{AB}.$$

1. Justifier que A, B et C forment un plan (ABC) .
2. Montrer que $D \in (ABC)$.

1) Comme A, B et C ne sont pas alignés alors ils forment un plan (ABC) .

2) Montrer que $D \in (ABC)$
 il faut montrer que $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

$$\overrightarrow{AD} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}.$$

$$3\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} + 4\overrightarrow{AB}.$$

$$-3\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) + 4\overrightarrow{AB}.$$

$$-3\vec{AD} = 2\vec{DA} + 2\vec{AB} - 3\vec{DA} - 3\vec{AC} + 4\vec{AB}$$

$$\begin{aligned} & -3\vec{AD} - 2\vec{DA} + 3\vec{DA} \\ & = 6\vec{AB} - 3\vec{AC} \end{aligned}$$

$$-3\vec{AD} + \vec{DA} = 6\vec{AB} - 3\vec{AC}$$

$$-3\vec{AD} - \vec{AD} = 6\vec{AB} - 3\vec{AC}$$

$$-4\vec{AD} = 6\vec{AB} - 3\vec{AC}$$

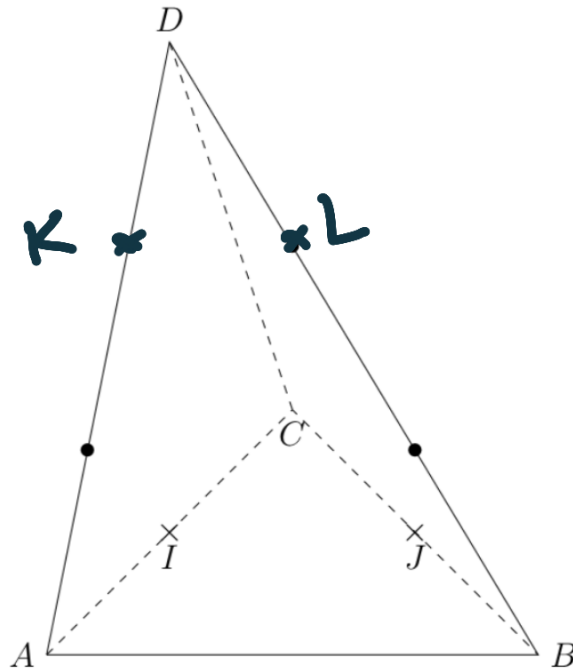
$$\vec{AD} = \frac{6}{-4}\vec{AB} - \frac{3}{-4}\vec{AC}$$

donc $\vec{AD} = -\frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$

clac $\mathcal{D} \in (\mathcal{ABC})$

Exercice 8 On considère le tétraèdre $ABCD$ ci-dessous où I et J sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BC]$ et K et L vérifient :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}.$$



1. Placer K et L sur la figure.
2. En remarquant que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$, justifier que $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont coplanaires.

$$\begin{aligned}
 2) \quad \overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} \\
 &= -\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \\
 &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \\
 &= \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} (\vec{BO} + \vec{OA}) + \vec{AB}$$

$$= \frac{2}{3} \vec{BA} + \vec{AB}$$

$$= -\frac{2}{3} \vec{AB} + \vec{AB}$$

$$= \frac{1}{3} \vec{AB}.$$

3) $\vec{KL} = x \vec{CI} + y \vec{CJ}$

α $\vec{KL} = \frac{1}{3} \vec{AB}$

$$\vec{CI} = \frac{1}{2} \vec{CA}$$

$$\text{et } \vec{CJ} = \frac{1}{2} \vec{CB}.$$

$$\begin{aligned}
-\vec{CI} + \vec{CJ} &= -\frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB} \\
&= \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} \\
&= \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CB}) \\
&= \frac{1}{2}\vec{AB} \\
&\quad \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}\vec{CI} + \frac{2}{3}\vec{CJ} &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\vec{AB} \\
&= \frac{1}{3}\vec{AB} \\
&= \vec{KL}.
\end{aligned}$$

donc $\vec{KL} = -\frac{2}{3}\vec{CI} + \frac{2}{3}\vec{CJ}$;

et les vecteurs $\vec{KL}$, $\vec{CI}$ et $\vec{CJ}$ sont coplanaires.

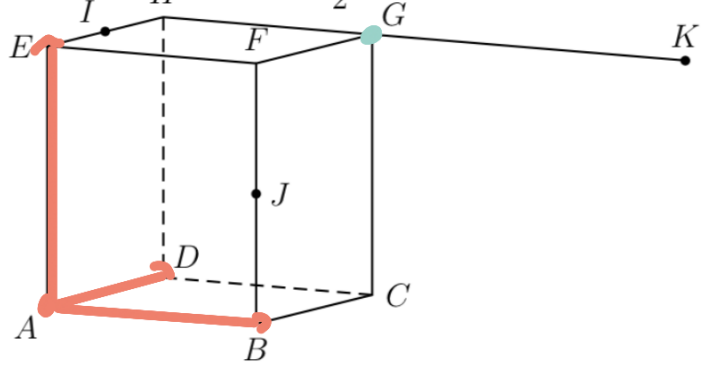
Exercice 1 Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté et on note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$ et K tel que $\overrightarrow{GK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

1. On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Donner sans justification les coordonnées de F , H , I , J et G .

2. On munit l'espace du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

Donner sans justification les coordonnées de F , I , et K .



1) $(A; \underbrace{\overrightarrow{AB}}_x, \underbrace{\overrightarrow{AD}}_y, \underbrace{\overrightarrow{AE}}_z)$

$F(1; 0; 1)$

$H(0; 1; 1)$

$I(0; \frac{1}{2}; 1)$

$J(1; 0; \frac{1}{2})$

$G(1; 1; 1)$

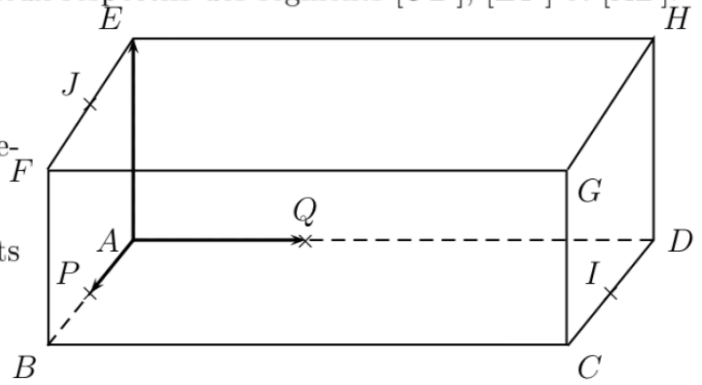
Exercice 2 Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = 2$, $AD = 3$ et $AE = 1$.

On appelle respectivement I , J et P les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[EF]$ et $[AB]$.

On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

1. Justifier que $(A ; \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé.

2. Donner les coordonnées de tous les points de la figure dans ce repère.



- 1) . $(AQ) \perp (AP)$
 . $(AQ) \perp (AE)$
 . $(AP) \perp (AE)$ } Les trois vecteurs sont orthogonaux
- $AP = AQ = AE$) Les 3 longueurs sont égales

Exercice 5 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-1 ; 0 ; 5)$, $B(2 ; 1 ; 3)$, $C(1 ; 1 ; 1)$, $D(4 ; -2 ; 1)$ et $E(10 ; -1 ; 5)$.

1. Montrer que les points A , B et C définissent un plan.

2. Montrer que $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

3. On admet que $D \notin (ABC)$.

Quelle est la position relative de la droite (DE) et du plan (ABC) ?

1) $\overrightarrow{AB}(3 ; 1 ; -2)$
 $\overrightarrow{AC}(2 ; 1 ; -4)$

$$\cdot \frac{3}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{-4}$$

donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et donc les points ne sont pas alignés.

Donc A, B, C définissent un plan.

$$2) \vec{DE} (6; 1; 4)$$

$$\vec{AB} (3; 1; -2)$$

$$\vec{AC} (2; 1; -4)$$

$$\Rightarrow \vec{DE} = k \vec{AB} + l \vec{AC}$$

$$\begin{cases} 6 = 3k + 2l \\ 1 = k + l \\ 4 = -2k - 4l \end{cases}$$