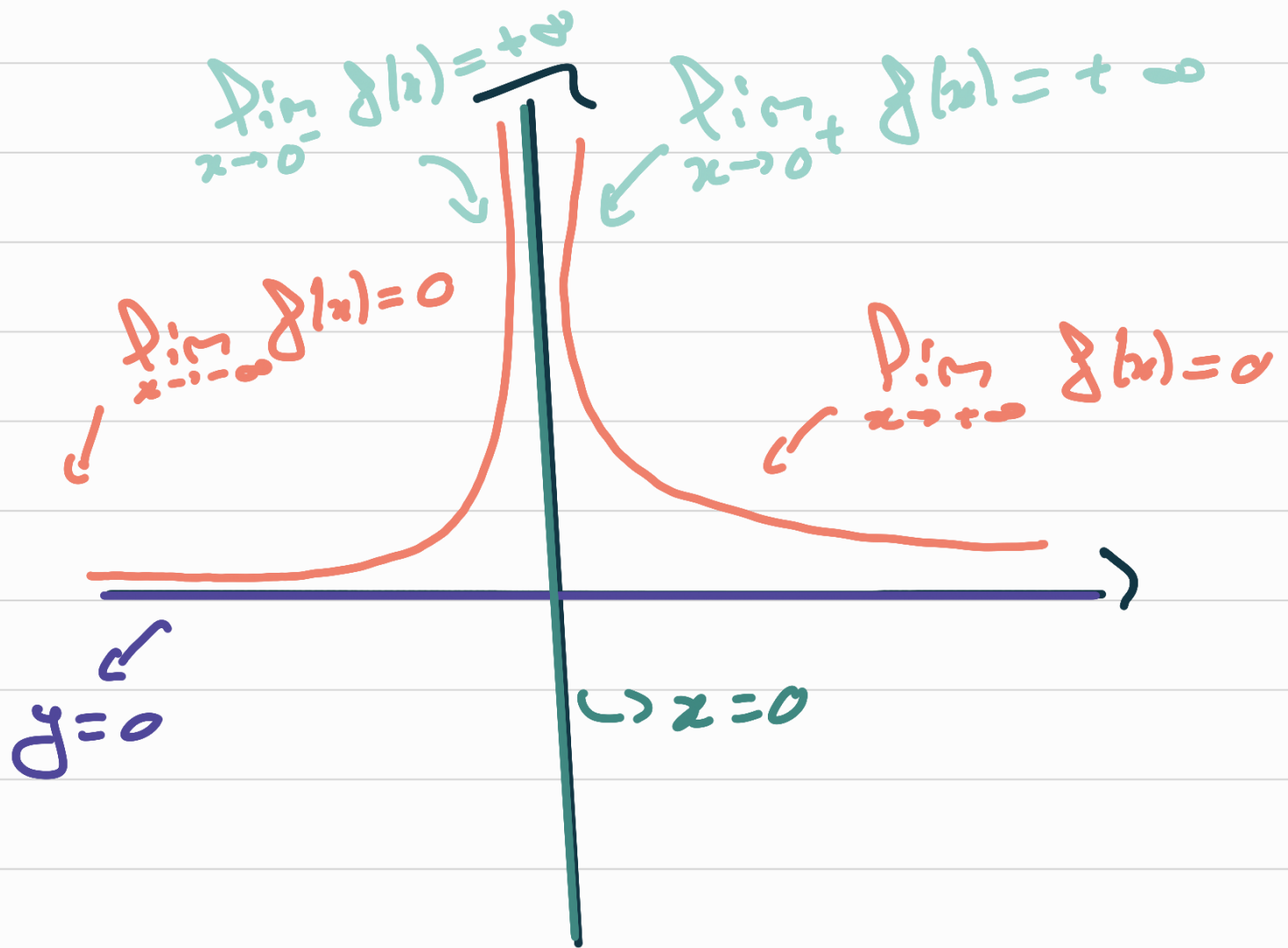


Limites de fonctions



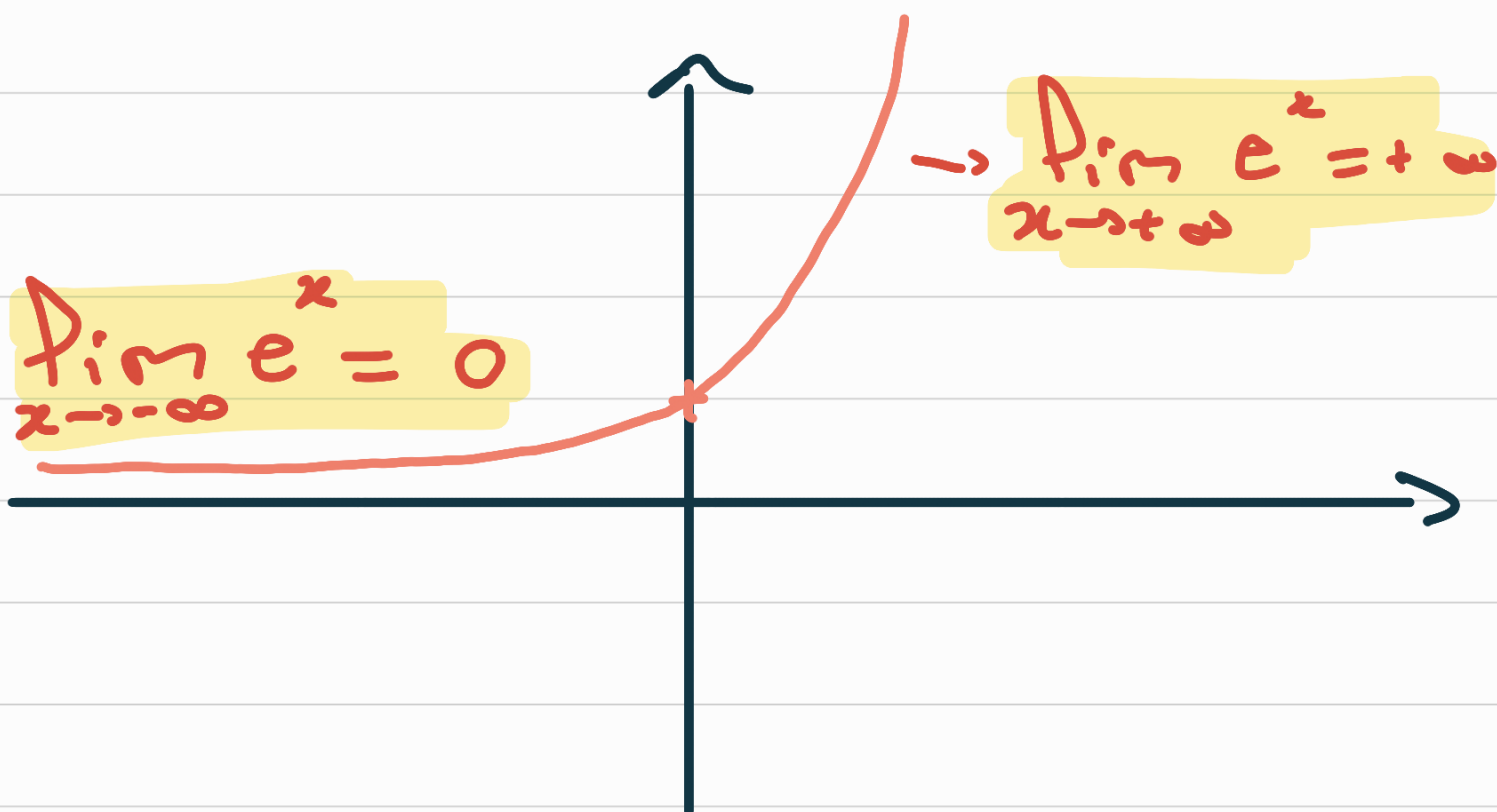
• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = p$

↳ f , f_g admet une asymptote horizontale d'équation $y = p$.

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$

↳ f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \quad / \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ pair} \\ -\infty & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Croissances comparées

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

e^x qui gagne

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + x - 2}$.

Combien d'asymptotes possède la courbe représentative de cette fonction? Déterminer leur équation.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$$

$$\frac{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{5\cancel{x}}{\cancel{x^2}} + \frac{1}{\cancel{x^2}} \right)}{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2}} - \frac{2}{\cancel{x^2}} \right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$\text{or } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x^2} = 0$$

donc par somme de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1.$$

Donc par quotient de limites.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$\hookrightarrow 1$ asymptote horizontale.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

x	$-\infty$	$\xrightarrow{-2^-}$	-2	$\xleftarrow{-2^+}$	1^-	1	$\xleftarrow{1^+}$	$+\infty$
signe x^2+x-2			+	0	-	0		+

① $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 5x + 1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - 2 = 0^+$$

D'après $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty$.

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 5x + 1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x - 2 = 0^-$$

$$\text{D'ailleurs } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty.$$

↳ $\pm$ asymptote verticale.

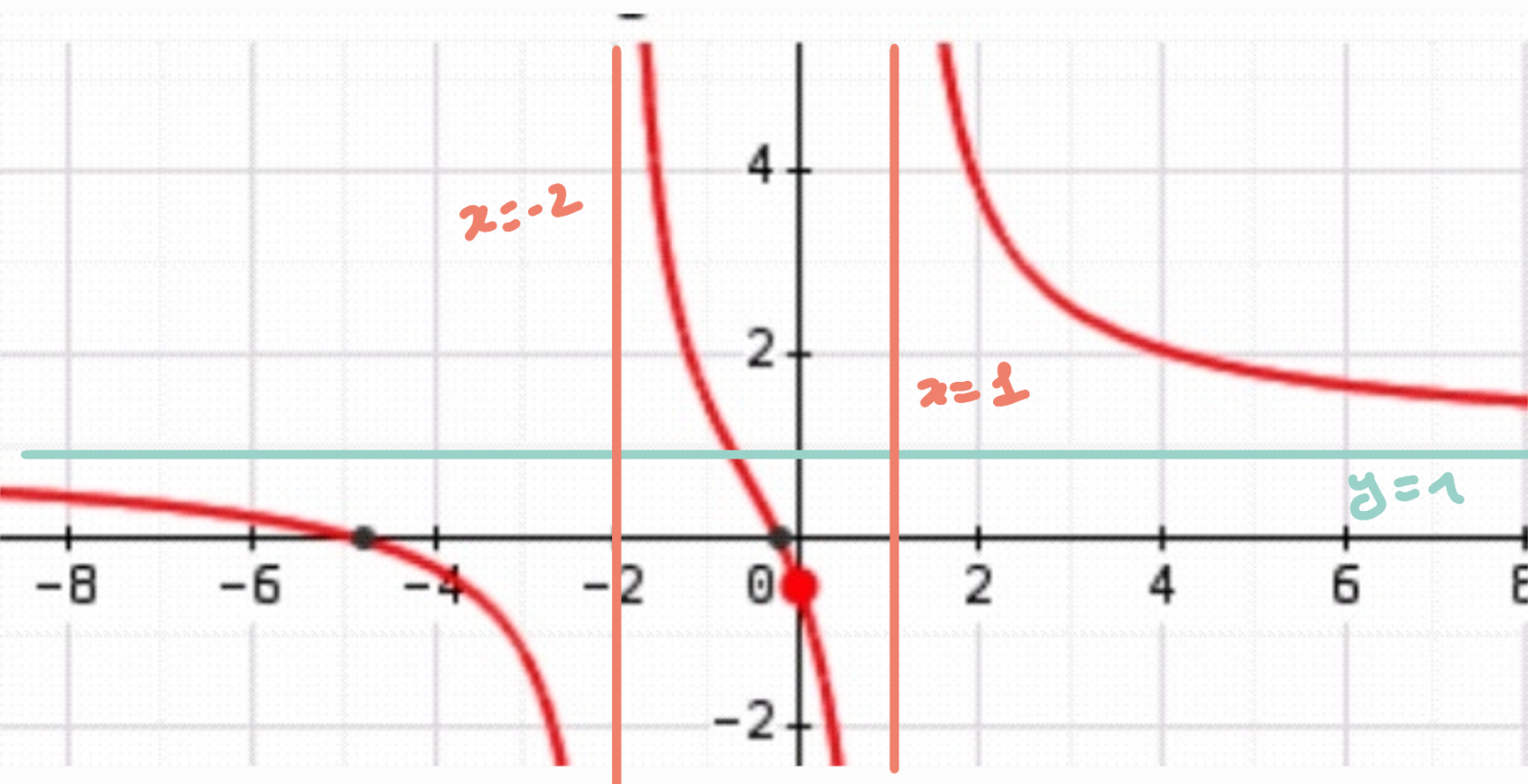
$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 5x + 1 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + x - 2 = 0^-$$

D'ací $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-5}{0^-} = +\infty$

$\downarrow$
 $-5x - \infty$



$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 + 5x + 1 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} x^2 + x - 2 = 0^+$$

$$\text{D'ailleurs} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-5}{0^+} = -\infty.$$

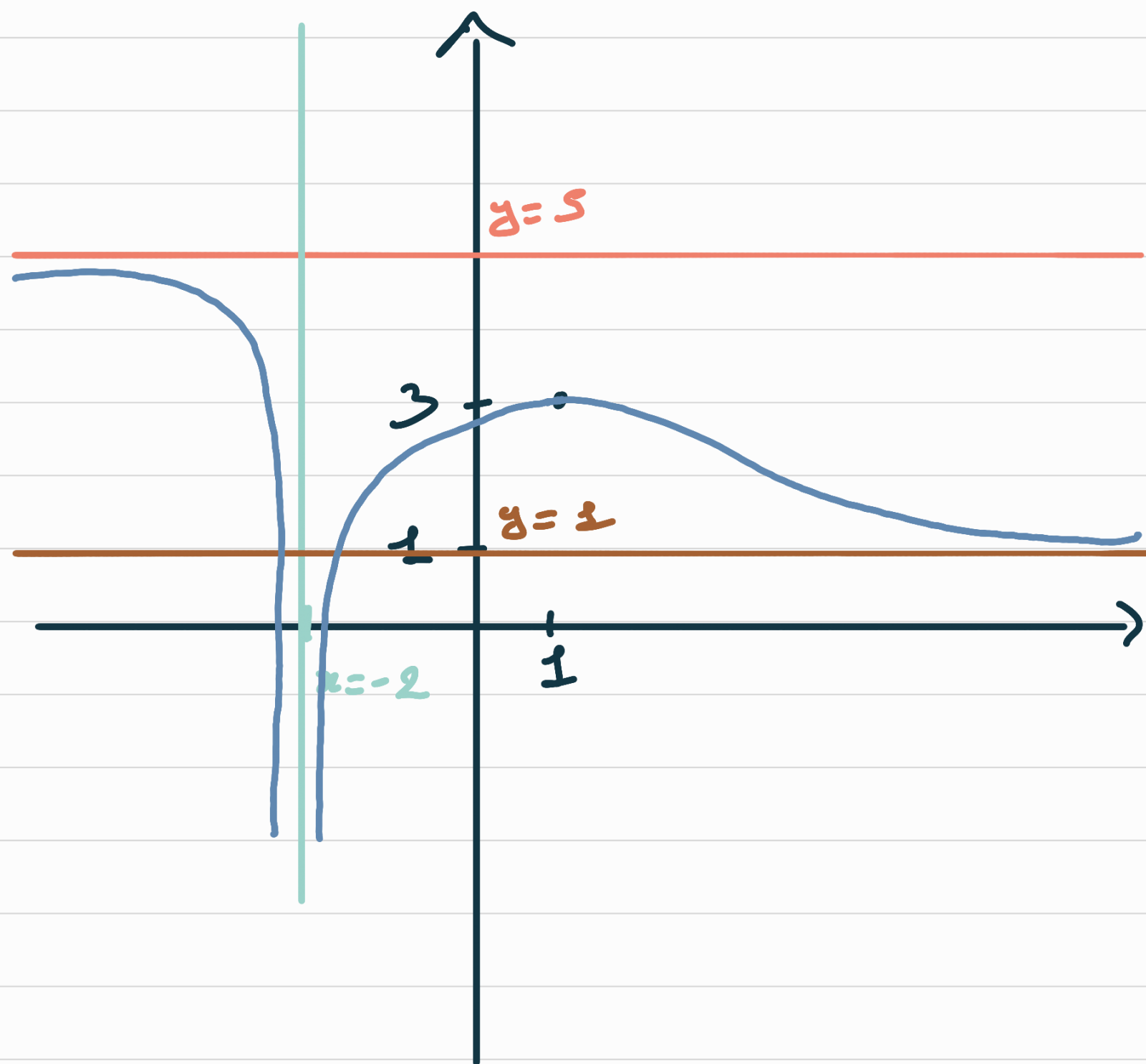
$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\hookrightarrow -5x + \infty}$

$\hookrightarrow$

1 asymp. verticale.

Donc E_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ et deux asymptotes verticales d'équation $x = 1$ et $x = -2$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f	5 ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ 3	3 ↘ 1	1



Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 6x + 9)e^x$.

1. Montrer que la courbe de f admet une asymptote horizontale.

2. a) Pour tout x réel, déterminer $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variation de f .

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(x^2 - 6x + 9)}_{+\infty} \underbrace{e^x}_0 \quad \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \right.$$

$$(x^2 - 6x + 9)e^x = x^2 e^x - 6x e^x + 9e^x$$

$$\propto \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \quad \text{par}$$

croissance comparée

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -6x e^x = 0 \quad \text{par c.c}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 9e^x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

$$2) a) f'(x) = (2x-6)e^x + (x^2-6x+9) \times e^x$$

$$= e^x (2x-6 + x^2-6x+9)$$

$$= \underbrace{e^x}_{>0} \underbrace{(x^2-4x+3)}_?$$

$$b) \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3.$$

