

Exercice 4

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-2x}$.

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Dédire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

$$1). \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0,$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

donc par somme de
limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad ?$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty ;$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

donc par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^{-2x} = -\infty - (+\infty)$$

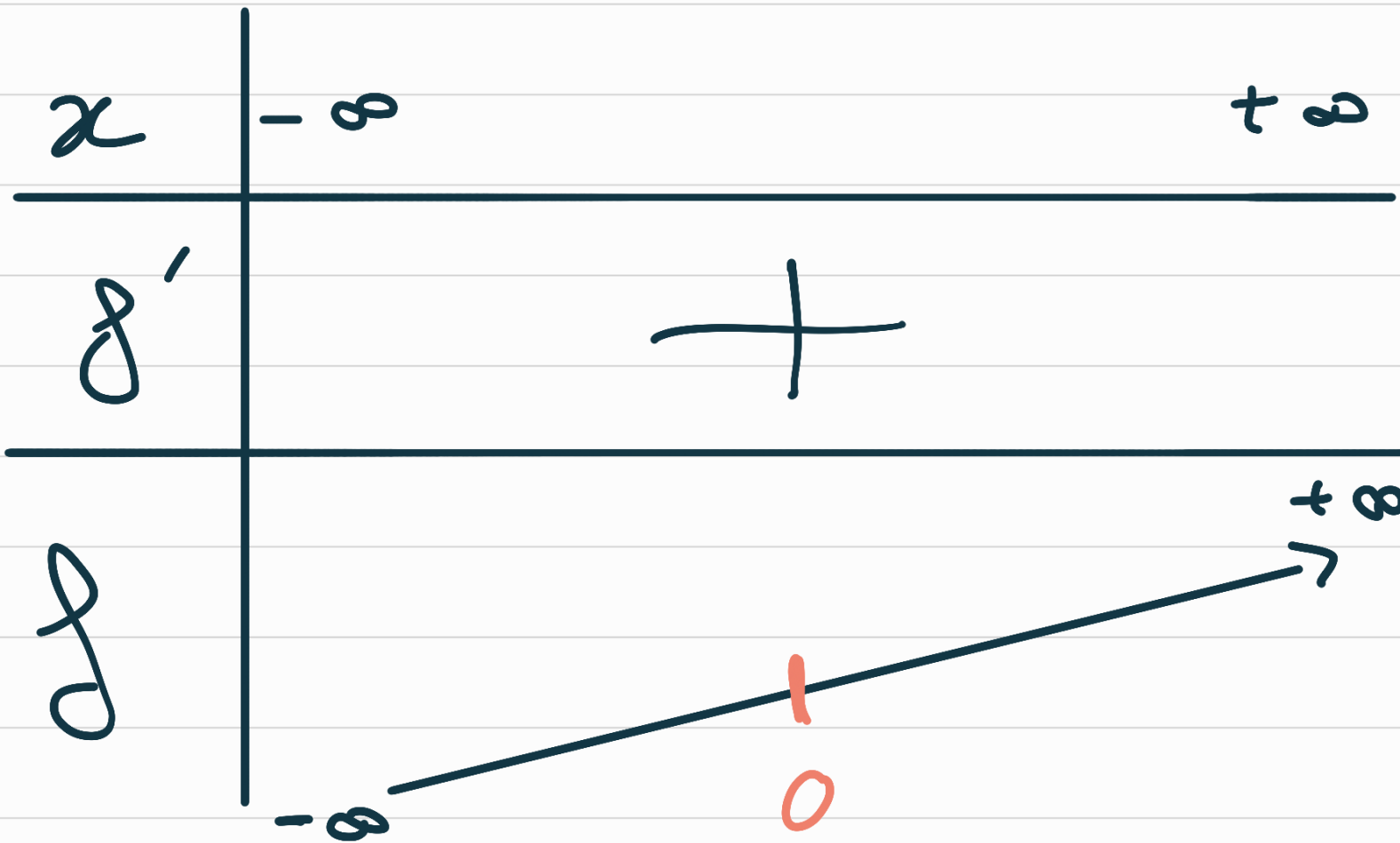
$$= -\infty - \infty$$

$$= -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$2) f'(x) = 1 + 2\underbrace{e^{-2x}}_{>0} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



3). f est continue sur $\mathbb{R}$.

• f est strict. croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty < 0$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$.

Donc d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

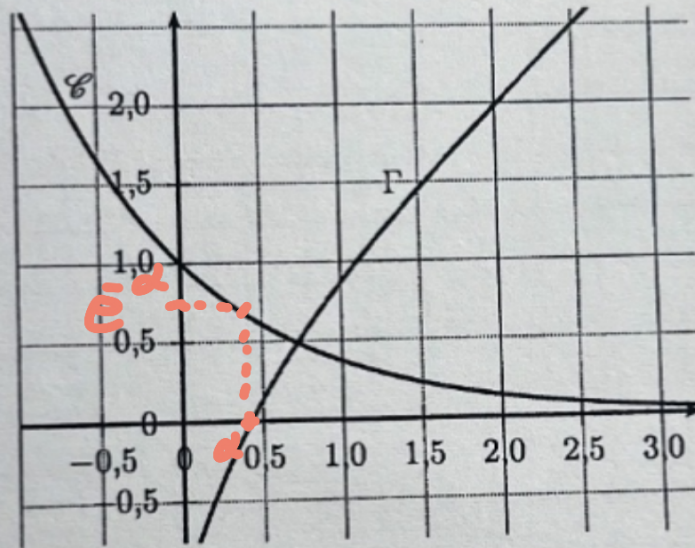
Une valeur approchée de α est 0,43.

4)	x	$-\infty$	α	$+\infty$
		—	0	+
	signe de f .			

Partie II

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$.

La courbe $\mathcal{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées ci-dessous :



Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathcal{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t , on note M le point de coordonnées $(t; e^{-t})$ de la courbe $\mathcal{C}$.

On considère la fonction h qui, au nombre réel t , associe la distance OM .

a) Exprimer $h(t)$ en fonction de t .

b) Montrer que, pour tout nombre réel t , $h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}$.

c) Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha; e^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathcal{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.

Placer ce point sur le graphique.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.

a) Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T .

On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.

On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :

Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1 .

b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Tracer ces droites sur le graphique.

$$1) a) OM = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

$$= \sqrt{(e - 0)^2 + (e^{-e} - 0)^2}$$

$$O_1 = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$$

$$\text{Donc } h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}.$$

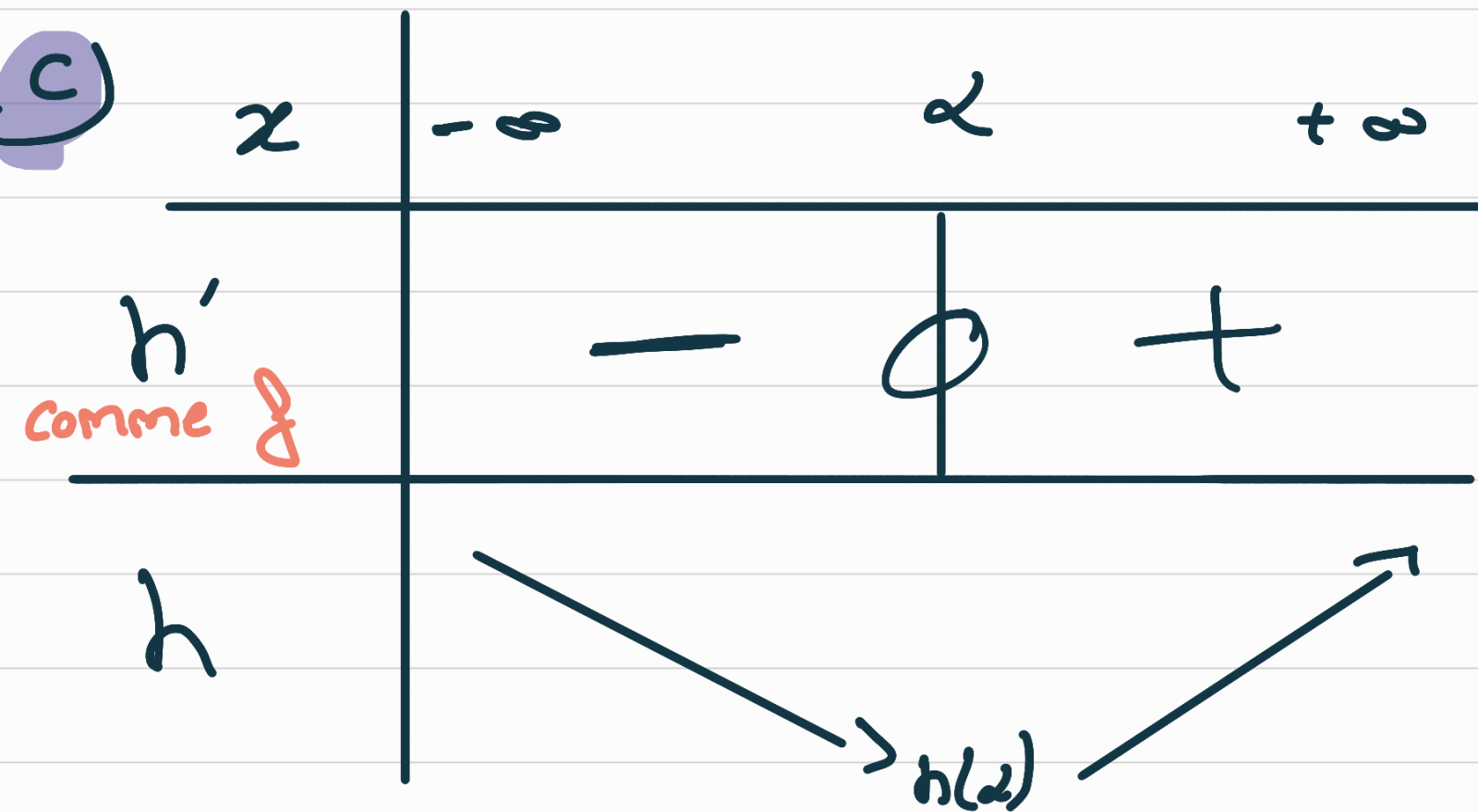
$$\sqrt{u} \Rightarrow (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$b) h'(t) = \frac{2t - 2e^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

$$= \frac{t - e^{-2t}}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}$$

$$= \frac{t - e^{-2t}}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}$$

$$= \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} \quad \begin{array}{l} \text{tableau de} \\ \text{signes} \end{array} \quad) > 0$$



donc h admet un minimum en $x = \alpha$.

Ainsi le point $A(\alpha; e^{-\alpha})$ est le point de la courbe pour lequel la longueur OA est minimale.

2) a) Le coefficient directeur de T est $g'(x)$

$$\text{or } g'(x) = -e^{-x}$$

Donc le coefficient directeur de T est :

$$g'(x) = -e^{-x}$$

b) (OA) a pour coefficient directeur $m = \frac{e^{-x}}{x}$ et T a pour

coefficient directeur $m' = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} \text{d'où } m \times m' &= \frac{e^{-x}}{x} \times -e^{-x} \\ &= -\frac{e^{-2x}}{x} \end{aligned}$$

$$\alpha \frac{-e^{-2\alpha}}{\alpha} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-2\alpha}}{\alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-2\alpha} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow 0 = \alpha - e^{-2\alpha} \quad)) \quad f(x) = x - e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow 0 = f(\alpha)$$

α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$\text{Donc } \frac{-e^{-2\alpha}}{\alpha} = -1, \text{ et}$$

donc (OA) et T sont perpendiculaires.