

Série Fourier

$$\bullet S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

On cherche les coefficients de Fourier de f .

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$c_k(f) = \frac{a_k - ib_k}{2}$$

$$c_{-k}(f) = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

• si f paire, $b_k = 0, \forall k > 0$

• si f impaire, $a_k = 0, \forall k > 0$

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dt \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dt}$$

Devoir - Maisen

exercice 1 :

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dt < +\infty.$$

$$1) (E) \Rightarrow (\hat{E})$$

$\hookrightarrow$ transformée de Fourier avec les formules de dérivées.

$$(\hat{\hat{E}}) \Rightarrow (E)$$

$\hookrightarrow$ transformée de Fourier inverse.

on suppose avoir

$$\left((i\xi)^2 + 2(i\xi) + 1 \right) \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$$

$$\left(-\xi^2 + 2i\xi + 1 \right) \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

) transformée de Fourier inverse

$$-\xi^2 \hat{f}(\xi) + 2i\xi \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$$

$$\text{or } -\xi^2 \hat{f}(\xi) = \widehat{f''}(\xi)$$

$$i\xi \hat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi)$$

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi)$$

Ainsi :

$$\left((i\xi)^2 + 2(i\xi) + 1 \right) \widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

$$\widehat{f''}(\xi) + 2\widehat{f'}(\xi) + \widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

$$\widehat{f''}(\xi) + 2\widehat{f'}(\xi) + \widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

) linéarité de $\widehat{\cdot}$.

En appliquant la transformée de Fourier inverse :

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = g(t).$$

P.P

3) $h \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt = \int_0^{+\infty} t \bar{e}^t dt$$

or $t \bar{e}^t =_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ par croissance comparée

$$\frac{t \bar{e}^t}{\frac{1}{t^2}} = t^3 \bar{e}^t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

or $\frac{1}{t^2} \in L^1([0; +\infty[)$ par Riemann

Donc $t \bar{e}^t \in L^1([0; +\infty[)$, et $h \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x) dx = \int_A 1 dx$$

exercice 2:

Théorème de Plancherel:

si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors:

$$\begin{aligned} \| \hat{f} \|_2 &= \| f \|_2 < +\infty \\ &= \int_{\mathbb{R}} | \hat{f}(z) |^2 dz \end{aligned}$$

Comme $f' \in L^2$, alors d'après Plancherel :

$$\|\hat{f}'\|_2^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty$$

$$\text{or } \underbrace{|\hat{f}'|^2}_{\| \hat{f}' \|_2^2} = \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2$$

$$\text{donc } \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 < +\infty.$$

$$\bullet \mathcal{N}(f+g)$$

$$= \|(\hat{f} + \hat{g})(1 + \varepsilon^2)\|_2$$

$$= \| \hat{f}(1 + \varepsilon^2) + \hat{g}(1 + \varepsilon^2) \|_2$$

$$\leq \| \hat{f}(1 + \varepsilon^2) \|_2 + \| \hat{g}(1 + \varepsilon^2) \|_2$$

or $\|\cdot\|_2$ est
une norme

$$= \mathcal{N}(f) + \mathcal{N}(g).$$