

Limites de Fonctions

① Limites de fonctions composées.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x+2} \quad ?$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x+2 = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x+2} = 0$$

②. Comparaisons

$$\bullet \quad f(x) \leq g(x)$$

$$\rightarrow \text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$\rightarrow \text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty; \text{ alors}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\bullet \quad h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$$\rightarrow \text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x),$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

③

Croissances Comparées

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Exercices

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{x^2 + 1}$. Étudier la fonction f (domaine de définition, variation, signe et limites). Esquisser sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

• Domaine de définition

$$x^2 + 1 > 0 \quad \text{car} \quad \begin{aligned} x^2 &\geq 0 \\ x^2 + 1 &\geq 1 > 0 \end{aligned}$$

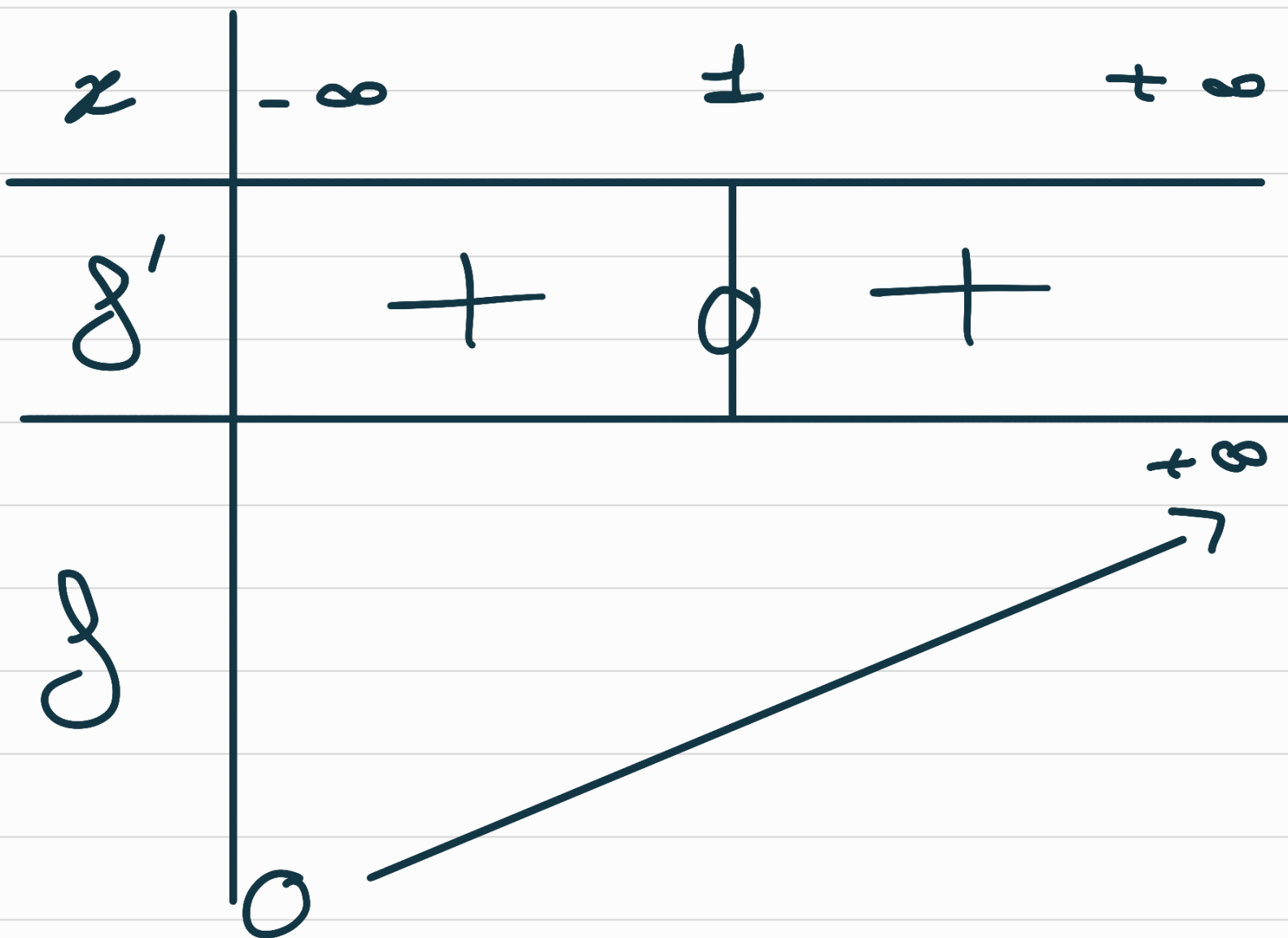
donc $D_f = \mathbb{R}$

• Tableau de variations

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0$$

$$x_0 = \frac{-3}{2a} = \frac{2}{2} = 1.$$



• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = +\infty$, par croissance comparée.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = 0$

Exercice 4 Une modélisation a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires d'une centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $f(x) = 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4}$ où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1^{er} janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et l'interpréter.

$$\begin{aligned} 1) \quad f'(x) &= -500x - 0,02e^{-0,02x+1,4} \\ &= -10e^{-0,02x+1,4} < 0 \end{aligned}$$

donc f est $\searrow$ sur $\mathbb{R}^+$

$$2) \quad f(x) = 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,02x+1,4} = 0,$$

par composition de limites.

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 12\,500$$

Exercice 4

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-2x}$.

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty, \text{ par}$$

composition de limites.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^{-2x} = -\infty - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty.$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0, \text{ par}$$

composition de limites.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^{-2x} = +\infty - 0 = +\infty.$$

done $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$ax+b \quad a=1, b=0$$

$$2) f(x) = \sqrt{x} - e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - (-2)e^{-2x} \\ &= 1 + 2e^{-2x} > 0 \end{aligned}$$

