

Devoir - Raisen

A. 1) $\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$

fonction test : $\mathcal{C}^\infty$ + supp compact

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, alors Tf
est bien définie

$$|\langle T_h, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{|x| \leq 0} \|D^2 \varphi\|_\infty$$

2)
$$h(nx) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq nx \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$-1 \leq nx \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$

$$\langle T_{h_n}, \varphi \rangle = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx$$

Théorème de la moyenne:

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et donc φ continue,
 $\exists c_n \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}]$, tel que.

$$\varphi(c_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} - (-\frac{1}{n})} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{n}} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx$$

$$= \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx$$

donc $\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx = \frac{2}{n} \varphi(c_n).$

donc :

$$\langle T_{h_n}, \varphi \rangle = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx$$

$$= \frac{n}{2} \times \frac{2}{n} \varphi(c_n)$$

$$= \varphi(c_n).$$

Comme $c_n \in \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$, alors

Puisque $n \rightarrow +\infty$, alors par
théorème d'encadrement $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

or $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors en
particulier elle est continue.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(c_n) = \varphi(0)$.

Donc $\langle T_{h_n}, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(a)$
 $= \langle \delta_a, \varphi \rangle$

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

et T_{h_n} converge au sens des distributions vers δ_a .

Remarque: $u = nx$ + théorème de convergence dominée.

$$h(x-n) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x-n \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$-1+n \leq x \leq 1+n$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors il existe $A > 0$, $\text{supp}(\varphi) \subset [-A; A]$.

or pour $n > A + 1$, l'intervalle

$$[n-1; n+1] \cap [-A; A] = \emptyset.$$

Donc $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in [n-1; n+1]$

$$\text{et } \langle T_{H_n}, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc T_{H_n} converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution nulle.

B. 1) $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ car

$$f \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}).$$

donc l'opérateur $\varphi \mapsto f\varphi$ est continu et linéaire.

et T est continu car $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Donc $\varphi \mapsto \langle T, f\varphi \rangle$ est continue par composition.

De plus, T étant linéaire alors $\varphi \mapsto \langle T, f\varphi \rangle$ est linéaire.

Donc fT est bien une distribution.

$$2) \langle (fT)', \varphi \rangle$$

$$= -\langle T, (f\varphi)' \rangle + \langle T, f'\varphi \rangle$$

$$= \langle fT', \varphi \rangle + \langle f'T, \varphi \rangle$$

$$= \langle fT' + f'T, \varphi \rangle$$

donc au sens des distributions

$$(\mathcal{F}T)' = \mathcal{F}T' + \mathcal{F}'T$$

- définition de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$
- définition de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- dérivée dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- Dirac et Heaviside
- si $f \in L^1_{\text{loc}}$, alors $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$