

# Orthogonalité

•  $\vec{u}(x; y; z) \quad \vec{v}(x'; y'; z')$

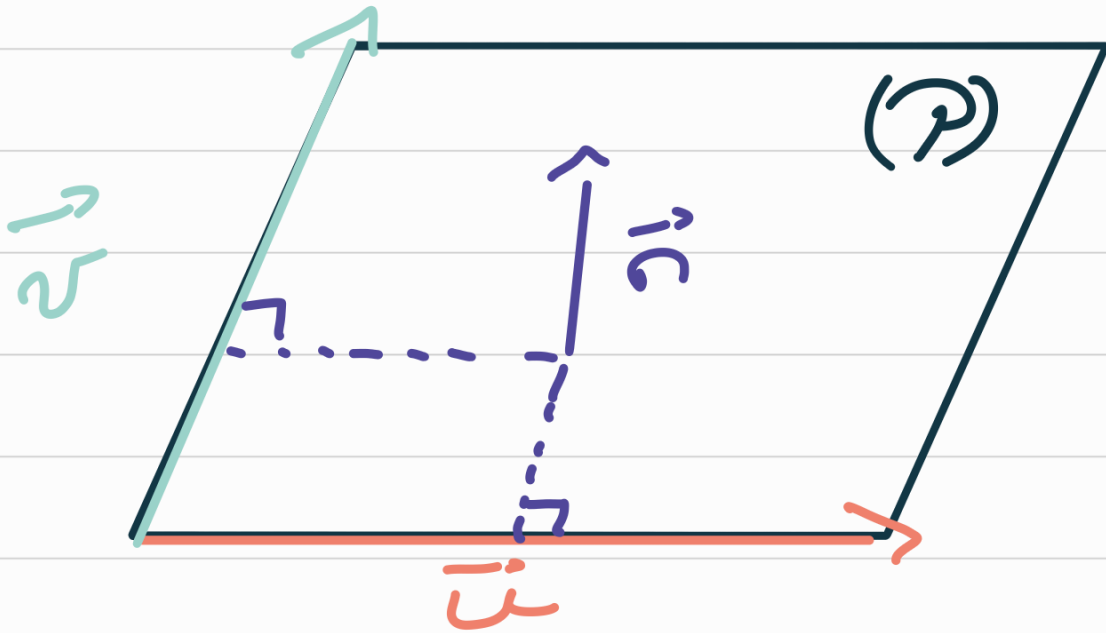
$\hookrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ .

•  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

---

## ① Plan et équation

• un vecteur  $\vec{n}$  est dit normal à un plan  $(P)$  si  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui dirigent le plan.



méthode : montre que  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan  $(P)$  de vecteurs directeurs  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

• une équation cartésienne d'un plan  $(\mathcal{P})$  de vecteur normal  $\vec{n}(a; b; c)$  :

$$ax + by + cz + d = 0$$

méthode : Trouver une équation cartésienne d'un plan.

- $\vec{n}(a; b; c)$  normal au plan
- $A(x_A; y_A; z_A) \in (\mathcal{P})$

$$\left( \begin{array}{c} \text{nb} \\ \downarrow \end{array} ax + \begin{array}{c} \text{nb} \\ \downarrow \end{array} by + \begin{array}{c} \text{nb} \\ \downarrow \end{array} cz + \overset{?}{\boxed{d}} = 0 \right.$$

pour trouver la valeur de  $d$ , on remplace les coordonnées du point  $A$  dans l'équation et

on résoud une petite équation.

---

## ② - positions droites et plans

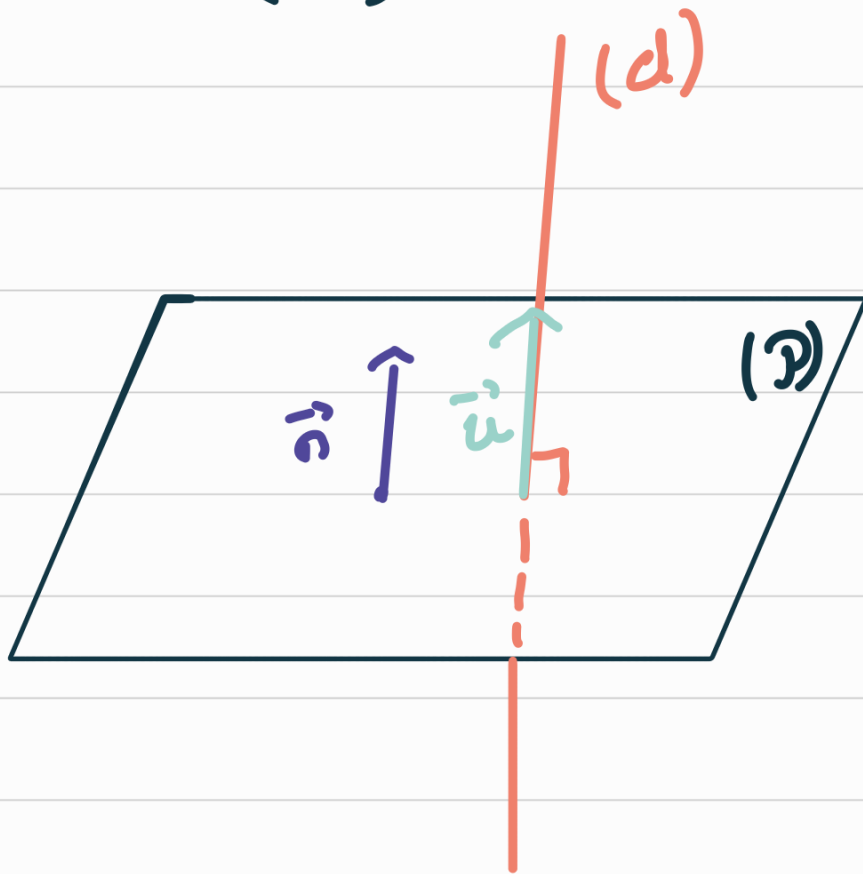
• deux droites sont dites orthogonales / perpendiculaires si leur vecteur directeur sont orthogonaux.

méthode : montrer que deux droites sont perpendiculaires.

- $(d_1)$  de vecteur directeur  $\vec{u}$
  - $(d_2)$  de vecteur directeur  $\vec{v}$
- ↳  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



• une droite  $(d)$  est dite orthogonale / perpendiculaire à un plan  $(P)$  si un vecteur directeur de  $(d)$  est un normal au plan  $(P)$

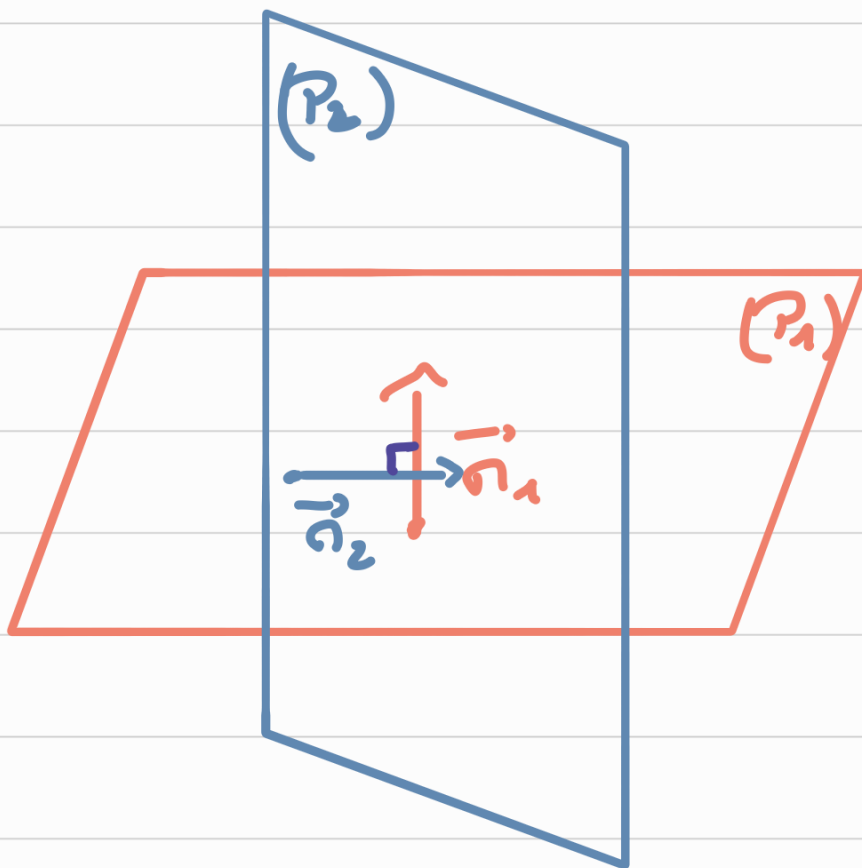


méthode: montrer qu'une droite et un plan sont perpendiculaires.

- $(d)$  de vecteur directeur  $\vec{u}$
- $(P)$  de vecteur normal  $\vec{n}$ .

$\Rightarrow$  il faut montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires.

• deux plans sont dits orthogonaux ou perpendiculaires si leur vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.



méthode: montrer que deux plans sont perpendiculaires.

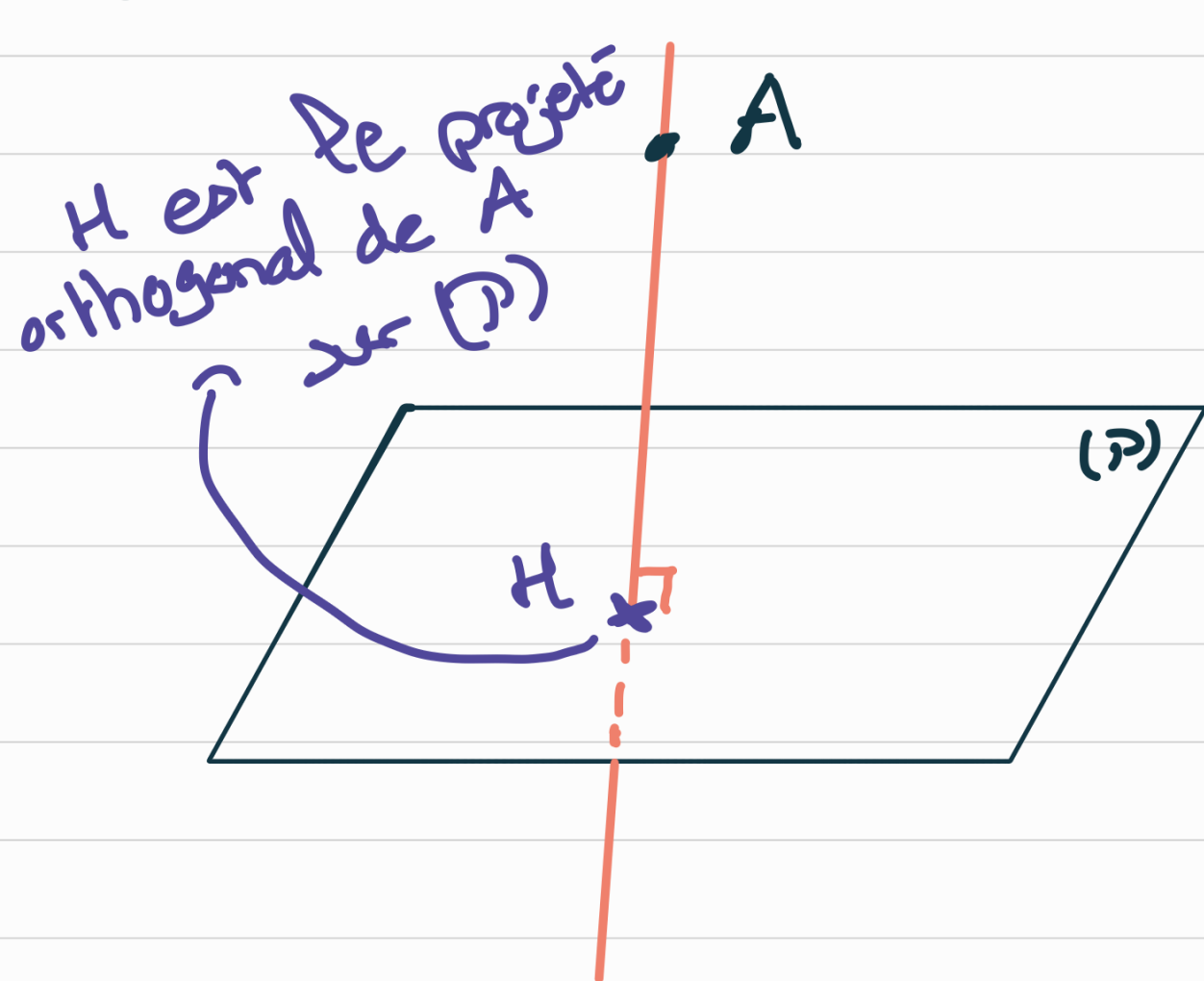
•  $(P_1)$  vecteur normal  $\vec{n}_1$

•  $(P_2)$  vecteur normal  $\vec{n}_2$

↪  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ ,

---

### ③ - Projeté orthogonal.



méthode : montrer qu'un point  $H$  est le projeté ortho. de  $A$  sur le plan  $(P)$ .

- $H \in (P)$
- $(AH) \perp (P)$ .

La distance du point  $A$  au plan  $(P)$  est la distance  $AH$ .

$$(> AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$$



## Équation cartésienne de plan

Dans toute la feuille, les coordonnées et équations sont données dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé de l'espace.

**Exercice 1** Donner un vecteur normal à chacun des plans dont l'équation est donnée ci-dessous :

1.  $2x + 3y - 5z + 7 = 0$     2.  $x - 8y + 3z = 5$     3.  $2x + y = 9$     4.  $5x - y + 2 = 8z$

**Exercice 2** Donner une équation cartésienne :

1. du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A(5; -1; 2)$  et de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ .
2. du plan  $\mathcal{P}'$  passant par  $B(2; 0; 3)$  et de vecteur normal  $\vec{n'} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3** Le plan médiateur d'un segment  $[AB]$  est le plan perpendiculaire à  $[AB]$  et passant par le milieu de  $[AB]$ .

Déterminer une équation de  $\mathcal{P}_1$ , le plan médiateur de  $[MN]$  avec  $M(1; -3; 7)$  et  $N(-3; 5; 9)$ .

**Remarque :** Tous les points de ce plan médiateur sont à égale distance de  $M$  et de  $N$  : vous pouvez prendre un point quelconque de ce plan et le constater.

**Exercice 4** On considère les points  $A(1; 2; 4)$ ,  $B(0; 0; 2)$  et  $C(-3; -2; -1)$ .

1. Justifier que le plan  $(ABC)$  a pour équation  $2x + 3y - 4z + 8 = 0$ .
2. Déterminer les coordonnées de deux points de  $(ABC)$  différents de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Exercice 5** On considère les points  $A(5; 3; 8)$ ,  $B(7; 2; 7)$  et  $C(-2; 7; 14)$ .

1. Justifier que ces trois points définissent un plan  $(ABC)$ .

2. Montrer que  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$  est normal à  $(ABC)$ .

3. En déduire une équation de  $(ABC)$ .

**Exercice 6** On considère les points  $E(0; 3; 0)$ ,  $F(2; 6; 1)$  et  $G(10; 8; 0)$ .

On admet que ces trois points définissent un plan  $(EFG)$ .

1. Montrer que  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  est normal à  $(EFG)$ .

2. En déduire une équation de  $(EFG)$ .

**Exercice 7** Déterminer une équation du plan  $(RST)$  avec  $R(7; -4; 1)$ ,  $S(7; 1; 4)$  et  $C(4; 5; 7)$ .

## exercice 1:

1)  $2x + 3y - 5z + 7 = 0$   
↳  $\vec{n}(2; 3; -5)$

2)  $x - 8y + 3z = 5$   
↳  $\vec{n}(1; -8; 3)$ .

## exercice 2:

1)  $A(5; -1; 2)$   $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

↳  $3x + 6y + 8z + d = 0$

α  $A(5; -1; 2) \in (P)$ .

$$3 \times 5 + 6 \times (-1) + 8 \times 2 + d = 0$$

$$15 - 6 + 16 + d = 0$$

$$25 + d = 0$$

$$d = -25.$$

donc une équation cartésienne  
de  $(\mathcal{D})$  est :

$$3x + 6y + 8z - 25 = 0$$



Exercice 5 On considère les points  $A(5; 3; 8)$ ,  $B(7; 2; 7)$  et  $C(-2; 7; 14)$ .

1. Justifier que ces trois points définissent un plan  $(ABC)$ .

2. Montrer que  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$  est normal à  $(ABC)$ .

3. En déduire une équation de  $(ABC)$ .

1)  $\vec{AB}(2; -1; -1)$   
 $\vec{AC}(-7; 4; 6)$

$$\cdot \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7} \quad \cdot \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$\neq$

donc les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires, et donc les points  $A, B, C$  ne sont pas alignés.

Donc  $A, B, C$  définissent un plan.



$$2) \vec{AB}(2; -1; -1)$$

$$\vec{AC}(-7; 4; 6)$$

$$\begin{aligned} * \vec{n} \cdot \vec{AB} &= 2 \times 2 + 5 \times -1 + -1 \times -1 \\ &= 4 - 5 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \vec{n} \cdot \vec{AC} &= 2 \times -7 + 5 \times 4 + 6 \times -1 \\ &= -14 + 20 - 6 = 0 \end{aligned}$$

donc  $\vec{n}$  est orthogonal à  
deux vecteurs non colinéaires du  
plan  $(ABC)$ , donc c'est un  
vecteur normal.

3) .  $\vec{n}(2; 5; -1)$  normal.

.  $A(5; 3; 8) \in (ABC)$

---

$$\rightarrow 2x + 5y - z + d = 0$$

$\alpha$   $A(5; 3; 8) \in (ABC)$ , donc

$$2 \times 5 + 5 \times 3 - 8 + d = 0$$

$$10 + 15 - 8 + d = 0$$

$$17 + d = 0$$

$$d = -17$$

Donc une équation cartésienne

$$2x + 5y - z - 17 = 0$$

## Positions relatives

Dans toute la feuille, les coordonnées sont données dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace.

### Exercice 1

1. Déterminer un vecteur normal à chacun des plans  $\mathcal{P}$  d'équation  $5x + 3y - 7z + 3 = 0$  et  $\mathcal{P}'$  d'équation  $8x - 11y - z = -7$ .
2. Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont-ils sécants ou parallèles ?
3. Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont-ils perpendiculaires ?

**Exercice 2** Étudier les positions relatives des plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  d'équations cartésiennes respectives  $3x + y - 5z + 8 = 0$  et  $-6x - 2y = 15 - 10z$ .

**Exercice 3** On donne ci-dessous une équation cartésienne d'un plan  $\mathcal{P}$  et une représentation paramétrique d'une droite  $d$ .

Étudier les positions relatives de  $d$  et  $\mathcal{P}$ .

1.  $x + y - 2z + 10 = 0$  et  $\begin{cases} x = 5 + k \\ y = 1 + k \\ z = 4 - k \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

2.  $x + y - 2z - 3 = 0$  et  $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = k \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

3.  $x - y + z + 1 = 0$  et  $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -1 + k \\ z = 3k \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

4.  $x - 3y + z - 1 = 0$  et  $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 4** Montrer que la droite  $d$  d'intersection des plans  $\mathcal{P}$  d'équation  $3x + 2y - 11 = 0$  et  $\mathcal{P}'$  d'équation  $x + y + z = 3$  admet pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 5** Déterminer si elle existe une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  d'équations respectives :

1.  $x + y + 2z - 3 = 0$  et  $x - 4y + 5z - 6 = 0$
2.  $6x - 8y - 2z = 5$  et  $-3x + 4y + z - 7 = 0$ .

**Exercice 6** On considère

- les points  $A(1; 1; -2)$  et  $B(-1; 3; 2)$ .
- Le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $x + my - 2z + 8 = 0$  où  $m$  est un nombre réel.

Quelle est la valeur du réel  $m$  pour laquelle la droite  $(AB)$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$  ?

a.  $m = -1$

a.  $m = 1$

c.  $m = 5$

d.  $m = -2$



## exercice 1 :

$$(P) : 5x + 3y - 7z + 3 = 0$$

$$(P') : 8x - 11y - z = -7$$

$$1) \vec{n}(5; 3; -7)$$

$$\vec{n}'(8; -11; -1)$$

méthode : montrer que deux plans sont parallèles.

•  $(P)$  de vecteur normal  $\vec{n}_1$

•  $(P')$  de vecteur normal  $\vec{n}_2$

$\Rightarrow \vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont colinéaires,

2)

$$\vec{n} (5; 3; -7)$$

$$\vec{n}' (8; -11; -1)$$

$$\cdot \frac{5}{8} \quad \cdot \frac{3}{-11} = -\frac{3}{11} \quad \cdot \frac{-7}{-1} = 7$$




donc les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ne sont pas colinéaires. Donc les plans ne sont pas parallèles.

Donc les plans  $(P)$  et  $(P')$  sont sécants.

$$\begin{aligned}
 3) \quad \vec{n} \cdot \vec{n}' &= 5 \times 8 + 3 \times (-11) + \\
 &\quad -7 \times -1 \\
 &= 40 - 33 + 7 = 14 \neq 0
 \end{aligned}$$

donc les plans  $(P)$  et  $(P')$  ne sont pas perpendiculaires.